2

SVPPLEMENTI FRANCISCI VIETÆ, AC GEOMETRIÆ TOTIVS INSTAVRATIO.

Authore
A. S. L.

PARISIIS,
Apud PETRVM DES-HAYES,
viâ Citharœdicâ, ſub Roſâ Rubrâ.

M. DC. XLIIII.
Cum Privilegio Regis.

ILLVSTRISSIMO
IOAN. BAPT. AYROLO
PATRITIO GENVENSI,

CONSTANTIVS SILANIVS NICENVS

S. P. D.

QVÆ de Guſtus naturâ à Philoſopho dicta fuêre, detorquêri quoque ad majores animæ vires poſſe, nullus eſt qui dubitet; Aliquibus nempe Diſciplinæ quædam cordi ſunt, quas minimè tamen cæteris allúbere certum eſt: Atque eo in cenſu Mathematicas Demonſtrationes eſſe, Experientiâ conſtat; ſiue quòd præ nimiâ difficultate vulgares animos à ſui cognitione ſubmoueant; ſiue quòd Principum auctoritate ſolâ creſcant, eorumque vice verſâ commodis, ac belli, paciſque rebus promouendis potiùs, quàm Priuatorum ſtudijs inſeruire poßint. Iſti ſiquidem quoties bella decernunt, exercitúſve conſcribunt, Mathematici Radij

officium adunare cum Sceptris conſueuêrunt. Jmò verò quando armorum furore cuncta perſtrepunt, & Regiones integræ flammis; Urbes verò cuniculis fulminalibus, ferro devaſtantur: tunc potiſsimùm aliquam Matheſeos partem augeri majorem in modum, atque velut ex occultâ meditatione in hominum lucem, ſuis potiſsimùm operibus admirandis, erumpere conſpicuum eſt. Caterùm nullo negotio cognoſci faciliùs poteſt, quantùm illi ab hominum ſtudijs incrementi acceſſerit, quàm ſi ea quæ noſtris temporibus ſubtiliter excogitata fuêrunt cum Veterum inventis conferantur: Verùm quoniam non pauca hùc vſque in Geometrico pulvere occulta latent, quæ, quivis Priſcorum veſtigijs inſiſtens, velut è latebris in apertam hominum lucem proferre fruſtrà tentârit; Ego propterea ſæpius apud me perpendi, num aliqua daretur via, quam ingreſſus, poſſem ejuſmodi nodos Marte proprio diſſolvere, & Matheſin ex Inſtaurato Magni Vietæ Supplemento, nobiliorem; auctioremque facere. Quod mihi cum ex voto penitus acciderit, exiſtimaui etiam, quicquid illud tandem foret, omni jure Tibi, VIR ILLVSTRISSIME, deberi à me; tum quia rerum iſtarum Peritiſsimus es; cum etiam quia præter Honores, ac Magiſtratus, quos in Auguſtiſsimâ Republicâ Tuâ Ampliſsimos ſuſtines, Virtutum inſuper præſtantiſsimarum, ac humanitatis præſertim, ſingulariſque morum ſuauitatis ornamenta Tibi comparaſti. Quamobrem niſi meum iſtud Inventum Tibi cuſtodiendum obtulerim, parum

certè, vel Authoritatem Tuam agnoviſſe, quæ ſola meis paginis vitam perennem conciliare poteſt, aut perveteri meæ in Te obſeruantiæ, conveniēter feciſſe videar. Tuum eſt igitur munuſculum iſtud, quod Tibi magnâ oblatum eſſe animi propenſione non ignoras, pari benignitatis affectu ſuſcipere, méque non tam inverſi & mutati nominis reum, quàm gratiæ, & officiorum, humanitatiſque Tuæ compotem facere; quemadmodum ſanè te facturum eſſe mihi pro certo perſuaſi. Vale. Prid. Id. Iul. M. DC. XLIII.

Summa Privilegij Regij.

LVDOVICI XIV. Galliarum, & Navarræ Regis Diplomate cautum eſt, ne quis in ipſius Regnis, aliiſve Locis ejus Ditioni ſubjectis, intra proximos Annos quinque à Die primæ impreſſionis inchoandos, excudat, vendat; excudendum, vendendumque quovis modo, ac ratione curet, Librum qui inſcribitur, *Supplementi Franciſci Vietæ, ac Geometriæ totius Inſtauratio*, *Authore* A. S. L. per Extraneos, aut aliâ quâcunque viâ Editionem procurando, præter illius Libri Authorem, aut illos quibus ipſe conceſſerit. Idque prohibitum ſub pœnâ 3000. Librarum Turonenſium, & alijs Originali Diplomate contra delinquentes expreſſis. Datum Pariſijs Die Decimâ-tertiâ Nouembris, Anno Domini 1643. Ex Mandato Regis, Cancellatum, & Signatum, LE BRVN; necnon Sigillo Magno Regio munitum.

ABſoluta eſt Prima Editio, die ultimâ Ianuarij 1644. à PETRO DES-HAYES Typographo, & Bibliopolâ Pariſienſi; cui ab Authore conceſſa eſt facultas Librum cudendi, vendendíque per tempus Priuilegio Regio latum.

ERRATA.

PAginâ 4.Lineâ 16.Lege,oſcitantiâ. P. 7.l.20. Vt,lege, Sit. P. 8. l. 10. lege, concurſus. l. 18. D H: lege, F H. P. 16. l. 11. lege, iunctaque B I, bifariàm. P. 17. l. 2. Dele, D O. P. 17. & 18. in vtroque Schemate, Duc lineam ab A, ad D. P. 18. l. vltimâ, N. lege, G. P. 19. l. 8. N. lege, G. P. 21. l. 5. lege, conſtrui non poterant. l. 22. lege, *Angulum.* P. 31. l. 18. + A B Q. 20. lege, — A B Q. 20. P. 46. l. 3. lege, aut G δ, Parallela. P. 51, l. 24. lege, Anguli A C B. P. 54. l. 5. lege, ſunt E H I, E I H. P. 55. l. 20. lege, Æquali. P. 57. l. 3. lege, Algebræ. l. 8. P O. lege, H I. l. 14. lege, conveniens. P. 64. l. 13. opus ſit. lege, debet.

SVPPLEMENTI FRANCISCI VIETÆ, AC GEOMETRIÆ TOTIVS INSTAVRATIO.

NVLLAM in Literarum Republicâ jacturam contingere poſſe maiorem illâ, quàm ſi Rerum pręteritarum Monumenta depereant (quùm nullo deinceps inſtaurari ingenio poſſint) adeò manifeſtum cenſetur ab omnibus, vt prolixâ non oporteat vti probatione: In reliquis verò Diſciplinis, & ſi ad tempus, aut penitùs, aliqua amittantur; ſucceſſu tamen ſeculorum reparari, ac elegantiori educi formâ haud raro conſpiciuntur: Natura etenim vno non ita exhauritur, quin alia, etiam potiora innouare ac educere queat: immò, & quò magis progreditur, ſemper ad aliquid inueniendum aptiora producit ingenia. In Argumento ſanè à nobis ſuſcepto id habemus; ex eo quòd in Collectaneis Mathematum Pappi indicata vix ſint aliqua, Magno illi Apollonio Pergęo adſcripta: quæ an aliquando extiterint, haud liquet: vel temporum voracitas nobis abſtulit. Poſt igitur tot annorum curricula, ad noſtra vſque tempora, Nobiles

Mathematum Cultores ad eadem è tenebris educenda ſe conuerterunt. Quorum primus, alter verè Magnus Apollonius, fuit Franciſcus Vieta Gallus, qui Περὶ ἐπαφῶν, ſiue de Tactionibus Libellum ſuſcitauit (At ratione ſanè puerilia hæc quis dixerit, ſi ad ea quæ ille Marte ſuo nobis donauit, id eſt vniuerſam ditauit Matheſin.) Ordine deinde temporis Geometra valde acutus ſucceſſit ex Batauiâ feraci VVillebrordus Snellius, qui Περὶ διωρισμένης τομῆς, ſiue De Sectione Determinatâ Opuſculū: & inſuper Περὶ λόγου; & Περὶ χωρίου ἀποτομῆς: ſiue de Rationis; ac de Spatii Sectione evulgauit alia. Deinde Marinus Ghetaldus Geometra & Analyſta inſignis ex Illyrico, Περὶ νεύσεων, ſiue de Inclinationibus duobus Libris Apollonium Rediuivum adduxit. Hiſce iure omni, debet Alexander Anderſonus Scotus accenſeri, qui verè ingenio non vulgari, eiuſdem Apollonij quædam inueſtigauit Problemata; at eo in ætate florenti intercepto, plura nondum edita quæ conceperat, lucem obtinere nequiuerunt. Erunt fortaſſe, & alii, quorum labores noſtras præterierunt manus. Omnibus, ſi tempore poſterior, indaginis tamen ſubtilitate ex Primis, Renatus Des-Cartes Gallus, cui tanta fuit in vno abſoluendo Problemate cura, vt quod non Euclidi, nec Apollonio, nec Aliis (eodem in Septimo Libro Pappo referente) licuit; ille maximâ dexteritate reſolutum dedit. An verò in Analyticis penes Antiquos Ars progreſſa haberetur; quantùm deinde beneficio Specioſæ Logiſtices à Vieta inuentæ, credendum non erit facile: & aliorum eſto iudicium. Satis itaque, vt mihi videtur, oſtenſum fuerit nunquam deeſſe Naturam ad excitandum; & ſi in cæteris oporteret excurrere Facultatibus, ampliùs cōſtaret ingenia produci: ſed foret id præter aſſumptum. Silentio in-

terim inuolui non debet, per manus Profeſſorum Exemplar Manuſcriptum vagari (& nobis conceſſum fuerat) Opuſculi eiuſdem Apollonij de Locis Planis à D. Petro Fermatio Gallo in Tholoſanâ Aulâ Conſiliario eleganter reſtitutum: à quo tum de Locis Solidis expectabunt Studioſi vt publici fiat juris; quòd à nemine, inuito, aut inconſulto authore, debeat promulgari. Duo erát deinde, quæ ad integrandam Geometriam maximè pertinebant omni ſeculo deſiderata Problemata: Et quia intra limites conſtruere proprios non licuit, ad varia Antiqui ſe conuerterunt molimina, vt quoquo modo ſupplerentur; Alii per Lineare; Alii per Mechanicum; Alii verò per Solidum genus tradiderunt; hoc eſt, Quomodo, Inter duas Lineas Extremas, duæ Mediæ in Analogiâ Cótinuâ collocandæ eſſent; Et vnum erat Problematum. Alterum verò, Quomodo Angulum quemlibet Rectilineum Æqualiter Trifariam ſecari oporteret. Hæc duo plurimorum contorſerunt ingenia, & adeò per impropria abſolui genera à quibuſdam ex Neotericis malè audierat, vt Vieta in ſuo Geometriæ Supplemento, minus committi cenſuit, ſi relictis illis, ad implorandum nouum Poſtulatum deueniretur: Quod erat huiuſmodi; A quovis Puncto, ad duas quaſvis Lineas Rectam ducere interceptam, ab ijs præfinito poſſibili quocumque Interſegméto. Et hoc videlicet erat vtcumque, illa duo, & alia Problemata per aliquam Conceſſionem expedire: Adeò vt Anguli Triſectio deduceretur ad Problema aliud, De inſerendo Lineam Datam inter eductam Diametrũ, & Conuexam eiuſdem Circuli Periphæriam. Poſtulatum deinde illud à nonnullis receptum, vt ferè ab anno 1593. quo Turoni ediderat Vieta Supplementum Geometriæ, decurſu ferè quinquaginta annorum à nemine ſit

reprobatum. Immò Petrus Herigonius Gallus, Scriptor elegantiſſimus, poſt abſolutũ ſuum in Stadio Mathematum Curſum, in Appendice, ſiue Supplemento ad Algebram, ſtatim in Veſtibulo illud renouat, & aliqua ſuæ adaptat Problemata Methodo: vnde manifeſtè patet vſque ad annum 1642. quo Pariſijs editum illud eſt, receptum fuiſſe. Ita vt Dauid Riualtus Gallus in ſuo adornato Archimede paulò antè, aliquos Authorũ defectus excuſaſſe rationabiliter videretur: In calce namque Libri Secundi de Sphęra, & Cylindro, hæc adnotata inuenimus. Problema Deliacum in quod incidit Propoſitio Prima huius Secundi Libri non ſoluere, neutiquam, quocumque ſæculo pudori fuit vlli Geometrarum, &c.

Sed vt quod verum eſt aſſeratur, Poſtulatum eiuſmodi nunquam Geometria purior conceſſit: neque, authoritate Riualti, Authores excuſari queunt, vt eorum oſcitantiâ in ipſammet facultatem Defectus rejicerentur.

Et quum iam facili negotio per propria, ac germana Principia, hæc, & plura alia Problemata mihi viſum fuerit demonſtrari poſſe: Igitur nuncio omnibus machinamentis Antiquorum remiſſo, ac ſimul Vietæo Poſtulato expulſo, illa nos conſtruere aggredimur: ijs tantùm, quæ Communis Euclidea Schola amplectitur, admiſſis Principijs.

Opuſculi itaque huius, Ordo erit;

Vt per aliquot Problemata doceatur, Quo pacto legitimè Data Recta Linea inter Conuexum Peripheriæ, & eiuſdem Circuli eductam Diametrum aptari poſſit, vt ad Datum pertineat Punctum.

Deinde breuiter conſtruentur duo Problemata à Marino Ghetaldo inſoluta, in ſuo Variorum relicta.

Poſtea Diuiſio Tripartita Anguli cuiuslibet ſuccedet Plani.

Iſtis adnectentur aliqua Problemata Vietæ in Supplemento, & reſtituta per germanam conſtructionem dabuntur: Et ita totum illud Supplementum intra leges Geometricas, transferemus.

Heptagonum poſtea efformare monſtrabimus, non vnicâ Methodo. Similiter & Enneagonus delineabitur.

Vlteriùs Nouâ ac Generali formâ, non tantùm Angulus Rectilineus Tripartitò, ſed Quintù, & Septufariam; imò in quauis aliâ Ratione in quâ Circulum diuiſiſſe conſtabit, dirimetur Geometricè.

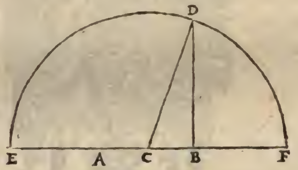
Præterea Duas Medias inter Extremas in ſerie Quatuor Linearum inuenire docebimus per Plana, Geometricè: Vnde reſultabit ipſamet efformatio Cubi in quacumque Ratione proponatur; Quod erit verè per Plana Antiquum illud, ac Famoſum Problema abſoluere.

Et paucis additis finem Opuſculi faciemus.

LEMMA PRIMVM.

Datâ Lineâ Mediâ, & Extremarum Differentiâ in ſerie Trium Proportionalium; inuenire Extremas.

SIT Linea AB Differentia duarum Extremarum, & Media BD, Oporteat inuenire Extremas. Diuidatur AB bifariam in C, & in altero Extremorum nempe B, ad Angulos Rectos ponatur BD, iunctaque CD fiat Semidiameter Circuli, & ſcribatur EDF, ad cuius Peripheriam producatur AB in E & F, Iam ex Elementis habetur, quòd Lineæ EB, BD, BF, in Continua ſint Analogia. Et cùm EC, CF, Semidiametri, Æquales ſint:



Sic & Æquales AC, CB, factæ erunt reſiduæ etiam EA, BF, Pares. Ideò Differentia Extremarum eadem redit AB, & Extremæ inuentæ EB, BF. Quod erat faciendum.

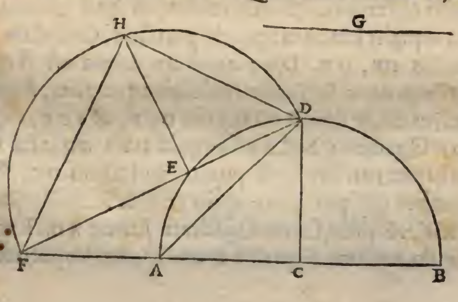
PROPOSITIO PRIMA.

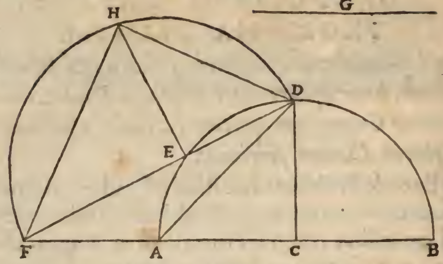
PROBLEMA PRIMVM.

Dato in Semicirculi Peripheria Puncto, & Lineâ Externâ, hanc aptare inter eductam Diametrum, & Circuli Conuexum oporteat, vt ad Punctum in Peripheria Datum pertineat.

GEnerale Problema hoc illud eſt, ad quod ſyncerio- res Geometræ, alterius Problematis ſolutionem, de Plani cuiuslibet Anguli Triſectione in Æquas referunt partes, vt à Generibus longè extraneis permixtam expurgarent Geometriam.

Habet itaque Symptomata non pauca, quorum opportuna magis, vt perſpicaciùs concipiantur, per diſtincta nos afferemus Problemata. Cæterùm deinceps Methodo prorſus diuerſâ, Anguli Plani Triſectionem, & vlteriùs demonſtraturi. Problema itaque vt proponitur, diuerſificari ex Datis poteſt: vel quia Externa Linea maior, minor, aut æqualis exponatur Semidiametro Circuli, & aſſignatum in Peripheria Punctum in vertice Quadrantis, citrà, vel vltrà cadere poteſt. Vt primo loco in dato Semicirculo ABD, Punctum in Quadrantis vertice D, & Li-





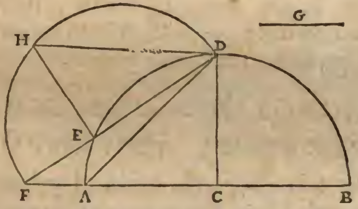
nea Externa G, maior, aut minor Semidiametro: oporteatque à Puncto D, Lineam ducere, ita vt conueniens cum BA educta Diametro, pars illa quæ erit à Convexo Circuli intercepta, fiat æqualis Datę Lineę Externæ G. Ducatur Linea AD, & hæc ponatur, vt Media inter duas Extremas, quarum Differentia ſtatuatur Linea Data G, & per Lemma præmiſſum inueniantur Extremæ, ſitque Maior DF, Minor DE, & à Puncto D, ducatur Linea DF donec concurrat cum BA. Sit converſus in F, (quòd autem conueniant neceſſe eſt, nam Angulus FCD Rectus, eſt FDC Recto minor) & ſuper DF, ſcribatur Semicirculus, in quo ponatur FH Linea æqualis Lineæ tangenti à puncto F, Circulum ADB, & iunctis HE, DH. Dico quòd FE Linea eſt Æqualis Datæ Externæ G. In Semicirculo namque FHD, Angulus H Rectus eſt, & duo Rectangula DFE, & FDE, æquantur DF Quadrato. Sed Rectangulũ DFE æquatur Quadrato Lineæ DH. Ergo reliquum Quadratum DH, Æquale remanet reliquo Rectangulo FDE, & idem Rectangulum FDE, Æquale fuerat Quadrato Lineæ AD. Ergo, & Lineæ AD, DH ſunt Æquales, & tres Lineæ Proportionales

FD,

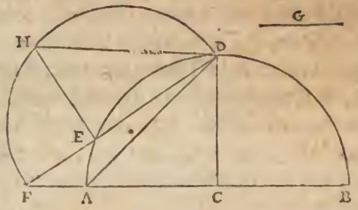
FD, DH, DE. Quare duo Triangula, quæ habent circa cumdem Angulum FDH Latera Proportionalia, nempe Triangulum FDH, & Triangulum DHE, erunt Æquiangula & Similia, & cùm in Triangulo FDH, Angulus FHD ſit Rectus, & alter Angulus in Triangulo DHE huic Relatiuus, Rectus erit, ſcilicet Angulus DEH. Ergò Trium Proportionalium Extremæ, ſunt FD, DE; Et illarum Differentia fit FE. At earundem Extremarum Differentia in Conſtructione, fuerat Linea G. Ideò FE, & G, erunt Æquales. At FE, pertinet ad Datum Punctum in Circumferentiâ D. Et factum erit quod oportuit.

ALITER.

IN conſimili Schemate, & ijſdem ſuppoſitis, pro Conſtructione, quoniam Rectangulum BFA, vnà cum



Quadrato AC, eſt Æquale Quadrato FC; ſi vtriſque addatur DC Quadratum, erit Rectangulum BFA, cum duobus Quadratis AC, CD, hoc eſt, Quadrato AD, Æquale Quadratis FC, CD, id eſt Quadrato FD, Aut, per interpretationem, duobus Rectangulis DFE, FDE. Sed Rectangulum FDE, Æquale, ex Conſtructione, eſt Quadratis duobus AC, CD, ſiue vni Quadrato AD. Ergò



Rectangulum FDE, conſtabit ex Extremis Proportionalibus, quarum DA, Media eſt. Ideò FD, DA, DE, Proportionales, & Extremarum Differentia fit FE, quæ intercipitur à Convexo Peripheriæ, & Diametro eductâ. Sed earumdem Extremarum Differentia fuerat, ex Conſtructione, Externa Data G. Ergò FE, & ipſa G, Æquales ſunt. Conueniunt namque ambo ad integrandam Analogiam Trium Proportionalium, ſtante Mediâ eâdem. Sed pertinet FE, ad Punctum in Peripheriâ D Datum. Ergo factum eſt quod oportuit.

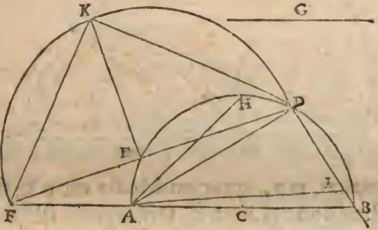
PROPOSITIO SECVNDA.

PROBLEMA SECVNDVM.

Dato Puncto in Peripheriâ vltra Quadrantis Verticem, & Lineâ Externâ, quæ iterùm ſit Semidiametro Major, illud idem efficere.

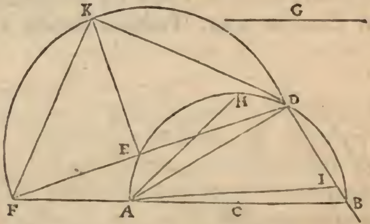
SIT Semicirculus ADB, in eo Punctum D, Linea Externa G Major Semidiametro AC. Accipiatur in Quadrantis Vertice Punctum H, & ducatur AH, ejuſque Quadratum à Quadrato junctæ AD auferatur, vt ſit illorum Differentia, quòd poſſit Linea DI, quæ ad

Rectos Angulos ponenda eſt ſuper AD, & juncta AI, hæc Media fiat inter Extremas, quarum Differentia ſit Linea Externa Data G, Inuentiſque Extremis, Major ſit DF; Minor DE. A Puncto deinde D, Linea ducatur DF, donec in Diametrum BA productam occurrat; & ſit Concurſus in Puncto F. Circa DF Diametrum deſcriptus eat Circulus DKF. Poſteà à Puncto F intelli-



gatur ad Semicirculum ducta Linea Tangens, quæ ſit Æqualis FK. Ducantur deinceps KE, DK. Dico quòd Portio Lineæ DF, ſcilicet FE, quæ cadit inter Peripheriæ ADB Convexum, & eiuſdem Circuli Diametrum, Æqualis erit Datæ Lineæ G Externæ. Quoniam FK, Æqualis eſt Tangenti Circulum AD. à Puncto F, eius Quadratum Æquale erit Rectangulo DFE. Sed hoc Rectangulum vnà cum altero FDE Rectangulo, ſunt Quadratum DF, Et hoc Æquatur duobus Quadratis FK, DK. Igitur Quadratum DK, Æquale fiet Rectangulo FDE. At Rectangulum FDE, Æquale fuit factum Quadrato AI. Ergò AI Quadratum, Æquale fit Quadrato DK; Et Linea Lineæ. Vnde Tres erunt Lineæ Proportionales FD, DK, DE, quæ in duobus Triangulis DFK, DEK, circa eundem Angulum FDK conſiſtunt.

Ergò Triangula illa ſunt Similia, & Æquiangula. In Triangulo verò F D K, Angulus in Semicirculo Rectus eſt; Ideò in altero Triangulo D K E, eius Correlatiuus D E K, Rectus erit. Linea igitur K E, perpendiculariter ſuper D F, in Puncto E cadit. Et Linea F E, ſit Differentia Ex-



tremarum F D, D E, quarum Media eſt D K, ſiue A I. At in Conſtructione, Linea G, Differentia illarum aſſumebatur. Igitur G, & F E, Æquales ſunt. Pertinet verò F E, ad Punctum in Peripheriâ D, Datum. Et hoc erat faciendum.

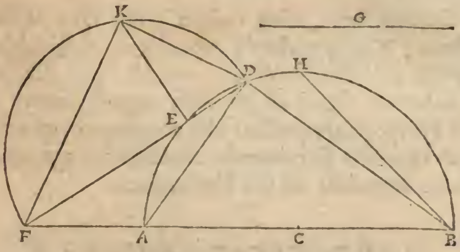
PROPOSITIO TERTIA.

PROBLEMA TERTIVM.

Dato Puncto in Peripheriâ Circuli citra Quadrantis Verticem, & Lineâ Externâ, quæ ſit adhuc Semidiametro Maior, illud idem efficere.

SIT Semicirculus, in eo Punctum D, citra Verticem Quadrantis, & Linea Externa G, Maior Semidiametro A C. Ducatur A D, Et in H, bifariam Semicirculus diuidatur, iunctáque Linea B H, ſumatur Differentia quadratorum B H, A D, & ſit quod poteſt Linea D K, quæ Media accipiatur Trium Proportionalium, quarum

Differentia Extremarum fiat G Externa Data; Inuentiſque Extremis ex Lemmate, ſit Maior DF: Minor DE:



Et à Puncto D, in Semicirculo Dato ducatur DF, vt concurrat cum protractâ Diametro BA, & in F Puncto ſit concurſus.

Dico quòd FE eius pars inter Convexum Peripheriæ, & Diametrum eductam, Æqualis eſt Datæ Externæ G, Demonſtratio prorſus fiet vt ſuprà, quam etiam repetere non piget. Circa DF, Semicirculus eat, & FK Æquetur Lineæ Tangenti à Puncto F, Circulum ADB. Ideò Tres ſunt Proportionales, DF, FK, FE, & Rectangulum FDE, poteſt etiam Quadratum DK. Sic iterum in Analogiâ ſunt FD, DK, DE. Quare in Triangulis FDK, DKE, cùm Proportionales ſint circa eundem Angulum FDK, ſunt Similia, & Æquiangula Triangula. Et idcircò Angulus DEK Rectus, & Trium Proportionalium FD, DK, DE, Differentia Extremarum eſt FE Externa, & pertinens ad Punctum Datum D. Sed eadem Differentia erat in Conſtructione, Linea G. Ergò Æquales euadunt Lineæ FE, & G. Et factum erit quod oportuit.

ADNOTATIO.

IN ſequentibus, cùm eadem poſſit Demonſtratio inſtitui, Nos à multiplâ repetitione abſtinebimus; præſertim quia Conſtructione peractâ, ſiquis illâ ruiſus opus habuerit, facilè ad præmiſſa regredi poterit. Cæterùm Symptomata poſſunt alia contingere, quæ vt parùm ab expoſitis ſint diuerſa, conſultò relinquimus; & ſat fuerit oſtendiſſe ad illa Methodum.

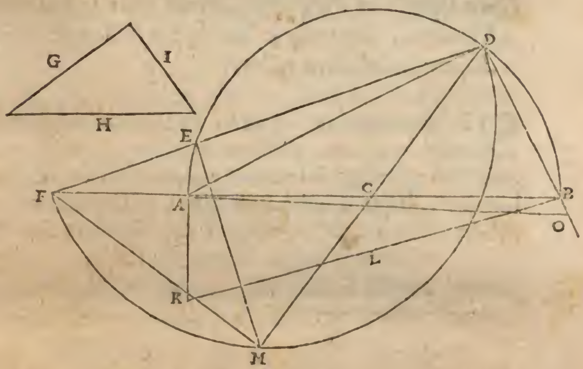
PROPOSITIO QVARTA.

PROBLEMA QVARTVM.

Dato in Peripheriâ Puncto vltra Quadrantis Verticem, & Lineâ Externâ, quæ ſit Semidiametro Minor, illud idem efficere.

SIT Semicirculus ADB: Punctum in Peripheriâ Datum D; Et Externa Linea Semidiametro Minor G. Sumatur Quadrati Semidiametri, ſuper Quadrato Lineæ G, Differentia; Et ſit Quadratum quod poſſit Linea I, quæ ad Angulos Rectos ſuper Diametro in A Puncto ponatur: ſitque AK, iunctáque KB, diuidatur in L bifariam, & duo Quadrata KL, vel BL, à Quadrato Lineæ AD (priùs ductæ) auferantur, vt Differentia Quadratorum fiat, id quod poteſt Linea DO. Et hæc ad Rectos Angulos ponatur ſuper AD; ſi opus fuerit DB prorogetur. Poſteà iungatur AO, quæ quidem vt Media accipiatur inter Extremas in ordine Trium Pro-

portionalium, quarum Extremarum Differentia ſit G Data. Inuentiſque Extremis, Maior ſit D F, Minor verò



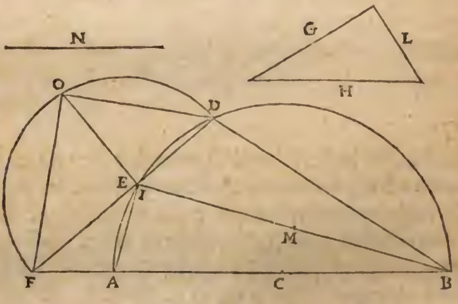
D E: Et à Puncto in Peripheriâ Dato D, ducatur D F, vt cum Diametro eductâ concurrat, & ſit in Puncto F, ſcriptoque deinde ſuper D F, Semicirculo D M F, in eo aptetur Linea F M, Æqualis illi que Rectangulum D F E poſſit: aut quod idem eſt, Æqualis Tangenti Circulum A D B, ex Puncto F, iunganturque D M, M E. Ergò Rectangulum D F E, Æquatur Quadrato F M. Et Quadratum D M, Rectangulo F D E. Igitur, vt ſuprà, oſtendetur M E, ſuper D F, ad Angulos Pares deſcendere. Et eâdem peractâ ratiocinatione, Methodo ſuperiori concludatur, F E Æqualem Datæ G, pertinentem ad Punctum D in Peripheriâ Datum. Et factum erit quod oportuit.

PROPOSITIO QVINTA.

PROBLEMA QVINTVM.

Dato Puncto in Peripheriâ Circuli citra Quadrantis Verticem, Externâque Lineâ, quæ ſit Semidiametro Minor, illud idem efficere.

SIT Semicirculus ADB, in eo Datum Punctum D, Externáque Linea G Minor Semidiametro. Accipiatur Differentia Quadratorum Semidiametri AC, & Datæ Lineæ G, ſitque quod poteſt Linea L Quadratum, & in Circulo ex A Puncto, ponatur AI, Æqualis L, iunctá-



que bifariam in M diuidatur, & Duplum Quadrati BM, aut MI auferatur à Quadrato BD, vt Differentia fiat Quadratorum, quod Linea N poſſit, & hæc Linea N ponatur Media Trium Proportionalium, quarum Differentia Extremarum fiat Data G. Inuentiſque Extremis, Major ſit DF, Minor verò DE, & à Puncto D, ducatur DF in concurſum eductæ Diametri BA, & in Puncto

Puncto conueniant F, ſupraque DF, eat Semicirculus in quo Linea DO accommodetur, Æqualis FO, quæ ſit potens Rectangulum BAF, ſiue ex F Puncto, illa quæ Circulum ADB tangit, & ducantur aliæ DO, EO; & facto, vt ſuprà, eodem diſcurſu, Concluſio eadem reſultabit; ſcilicet DO Mediam fieri inter DF, & DE, Ergò Æqualem ipſi N. Et cùm Linea G, ſit Differentia earumdem Extremarum FD, DE; ex Conſtructione quarum pariter Differentia eſt FE. Ergò G adplicata eſt vt petebatur, pertingens ad Punctum in Peripheriâ Datum D. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO SEXTA.

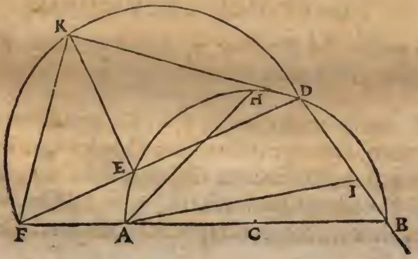
PROBLEMA SEXTVM.

Dato Puncto vtcumque in Peripheriâ Circuli, ſiue in ipſo Vertice, Citrà, vel vltrà; & Linea Externa ſit Semidiametro Æqualis, illud idem efficere.

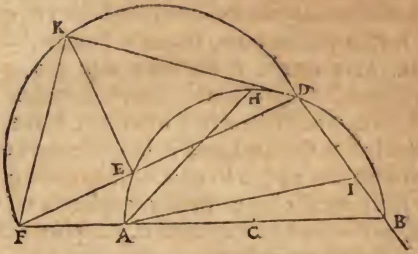
SYMPTOMA PRIMVM.

Sit Primum Punctum D, vltra Quadrantis Verticem.

AGatur Linea AD, & jungatur DB quantùm opus fuerit; ſectaque bifariàm in H Peripheria, ducatur



C

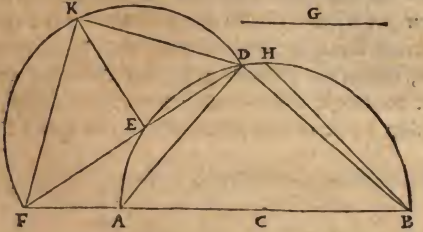


AH, & Differentia AD, AH Quadratorum illa ſit, quæ poſſit DI, quæ & ponatur ſuper AD ad Angulos Rectos in DI; iuncta deinde AI, hæc erit ponenda tanquam Media Trium Linearũ Proportionalium, quarum Differentia Extremarum, fiat in hoc caſu ſemper Semidiameter Data AC, vt in Hypotheſi, inueniantur de more Extremæ, & Major ſit DF, Minor DE; Cætera verò ſunt ordinanda vt ſuprà; Et eâdem ratiocinatione Concludetur AI, Æqualem DK, & Differentiam Extremarum DF, DE, ſcilicet FE, Æqualem fieri ipſi G, ſiue Semidiametro AC. Quod erat propoſitum.

SYMPTOMA SECVNDVM.

Iiſdem poſitis, ſed Punctum D, citra Quadrantis Verticem conſiſtat, illud idem efficere.

SIT Semicirculus ADB, & in Circumferentiâ Punctum D, ſumatur H Punctum Quadrantis; Et ductis AD, DB, HB, Differentia Quadratorum DA, HB, auferatur ab eodem Quadrato DA, vt ſit Differentia, quæ poſſit Linea N, & hæc accipiatur Media inter Duas Ex-

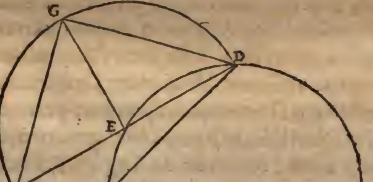


tremas, Differentia quarum ſit A C Semidiameter; inuentiſque Extremis, Maior ſit D F, Minor D E, Et à Puncto D, ducatur D F, vt cum productâ B A, conueniat in F Puncto, & circa D F Circuli Semiſſis ſcribatur, in quo aptetur F K, Æqualis tangenti Circulum A D B, ex eodem F Puncto, Et ducantur D K, K E, quæ vera ſunt reliqua ordinanda: Et argumentandum vt ſuprà, Concludetur N, Æqualem D K: Et F E Differentiam Extremarum D F, D E, Æquari Semidiametro A C. Quod erat propoſitum.

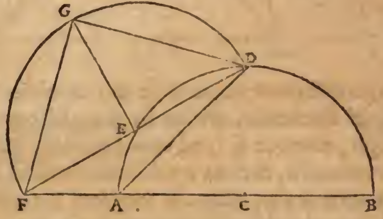
SYMPTOMA TERTIVM.

Iiſdem vt ſuprà poſitis, & Punctum D, *in Vertice conſiſtat Quadrantis, illud idem efficere.*

SIT Semicirculus A D B, in eo Punctum D, & Linea



Externa Æqualis Semidiametro A C, jungatur A D, quæ ponatur, vt Media Trium Proportionalium, quarum Differentia fiat ipſa Semidiameter A C, & inuentis Extremis, Major D F, Minor D E, à Puncto D, ducatur D F, vt contingit concurrere, cum B A productâ, & ſit in Puncto F; Scribatur Semicirculus, in quo à Puncto



F ducatur, ſiue aptetur Linea F G, Æqualis Lineæ Tangenti Circulum A D B, ab eodem Puncto F, Et ducantur D G, G E: Ex eâdem igitur pluries repetitâ formâ argumentandi, Concludetur D G Æqualem A D, & Differentiam F E Extremarum, Æqualem ipſi A C Semidiametro. Et hoc erat faciendum.

ADNOTATIO.

PAVCA hæc ſufficere poſſent, vt Methodo Geometricâ, tota demonſtraretur integra effectio Triſectionis Plani cuius-libet Anguli in Æquas partes: Nam in hac tantùm operatione à legibus Geometriæ Authores declinabant, vt Linea Data inter Convexum Peripheriæ, & eductam Diametrum aptaretur pertinens ad Datum in Peripheriâ Punctum; Libet attamen, antequàm principale illud Problema de Anguli Triſectione à no-

bis proponatur, ſolutionem afferre ad duo Quæſita, & inſoluta Problemata à Marino Ghetaldo in ſuo Variorum relicta; quæ quidem nec ipſe, qui poſt eadem evulgata, ſuperfuit ad quadrantem Seculi; nec quiſquam aliorum ſoluit: Et ſanè ex tunc Datis conſtrui poterant. Nunc verò ex ſuperiùs à nobis deductis nullo negotio perficientur.

In Libro igitur variorum Problematum Ghetaldi Venetijs Anno 1607. edito, poſt xviij, ac xix. Problemata in Recto Angulo feliciter abſoluta, ad illud quod generaliùs conceperat, Nimirùm illa eadem ſub quocumque Angulo conſtruenda cùm explere nequiret, & hoc valde optaret, in hæc verba deſcendit.

Magni momenti eſſent duo Problemata proximè præcedentia, ſi in omni Triangulo, non in Rectangulo tantùm, conſtruerentur; Primum enim oportunum eſſet ad Sectionem Anguli cujuslibet Plani, vel Circumferentiæ in tres partes Æquales. Secundum verò ad Duplicationem Cubi, proponerenturque illa duo Problemata hoc modo.

PRIMVM. *Dato vno ex Lateribus Trianguli Datum Angelum Verticis ambientibus, Datâque Differentiâ Segmentorum Baſis, inuenire Triangulum.*

SECVNDVM. *Dato vno ex Lateribus Trianguli Datum Angulum Verticis ambientibus, Datoque alterno Baſis Segmento, inuenire Triangulum.*

Si hæc Problemata conſtruerentur, Secaretur, vt diximus, quilibet Angulus Rectilineus, vel Circumferentia Trifariàm, Duplicaretur Cubus, atque Geometriæ ſupplerentur Defectus. Hæc Ghetaldus.

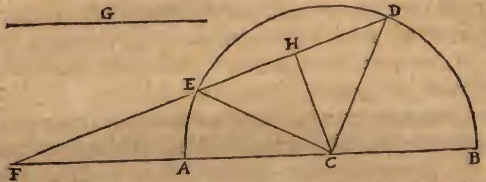
Ad illorum itaque Conſtructionem iter iam parauimus.

PROPOSITIO SEPTIMA.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Id, eſt Primum duorum Ghetaldi.

SIT Semicirculus ADB, in quo Centrum C, & Angulus Datus ſit, vel fiat ACD; Linea verò Data ſit CD ad Augulum Verticis, & Differentia Segmentorum Baſis G. Vt Triangulum igitur ex hiſce Datis con-



ſtruatur. A Puncto in Peripheriâ D Dato, & Lineâ Externâ G, ducatur DF, ex aliquo, ex ſuprà expoſitis, congruo Problemate; adeó vt Externa Linea FE, Æquetur G Datæ. Dico Tiangulum quæſitum eſſe conſtructum: Nam ſi ducatur Perpendicularis CH, ſuper DF, Differentia Segmentorum Baſis DF, fit FE, hoc eſt G. Quod erat intentum.

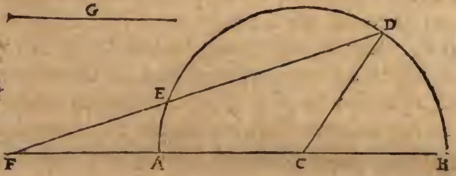
PROPOSITIO OCTAVA.

PROBLEMA OCTAVVM.

Id, eſt Secundum duorum Ghetaldi.

SIT Semicirculus ADB, & in eiuſdem Centro C, Datus ponatur Angulus ACD: Latus verò illud conſti-

tuens, fiat Semicirculi Semidiameter; & Linea G alternum Segmentum Baſeos, pariter ex aliquâ ex noſtris Propoſitionibus, vt ſuprà, congruâ, ipſi Puncto in Peripheriâ D, ducatur Linea D F, vt conueniens cum protractâ B A, in F, pars intercepta F E, Æqualis fiat expoſitæ G, & Triangulum Quæſitum erit conſtructum, cùm Segmenta Baſeos ſint D E, F E. Et alternum Æquatur G, vt oportuit.



ADNOTATIO.

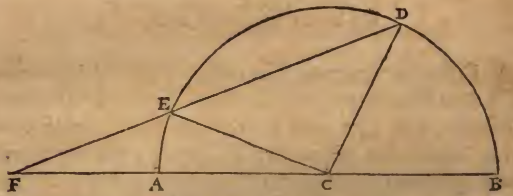
AD Authoris mentem fuerat hæc primùm quærenda Conſtructio, vt Anguli Plani deinceps haberetur Triſectio, nec data tunc erant ſufficientia: quia verè priùs Methodus præcedere debuerat, quâ aptaretur Data quælibet Linea inter Peripheriæ Convexum, & eductam Diametrum: Quod nos ſuprà præſtitimus, Vieta ſcilicet Supplementi Propoſitione ix^a, & Snellius Cyclometrici Propoſitione xxv^a. id apertiſſimè indicarunt. Et quod omninò ad Triſectionem Anguli per effectionem Planorum (de quorum familiâ propriè eſt) deeſſe videbatur, abundè ſuppletum ſit, ad Problema idem deuenimus.

PROPOSITIO NONA.

PROBLEMA NONVM.

Angulum quemcumque Rectilineum Trifariàm ſecare Geometricè.

DAtus ſit Angulus BCD, Æqualiter Triſecandus. Facto Centro in C, ad quamlibuerit Diſtantiam CD, Semicirculus fiat ADB, in cuius Peripheriam cùm cadat Punctum D, Ab eodem ducatur Linea DF, vt intercepta pars à Convexo Peripheriæ, & Diametro productâ, nimirum FE, fiat ipſi Semidiametro AC, Æqualis. Et hoc habetur ſuprà in congruo Problematis Sexti Symptomate demonſtratum. Dico quod Arcus DB, ſiue



Angulus BCD, Trifariàm Æqualiter ſectus erit, & eius pars Tertia erit Arcus AE, ſiue Ducta CE, Angulus ACE, Nam Conſtructi Trianguli CDF Angulus Externus BCD, valet duos CDF, CFD Internos, & Oppoſitos. Sed CED, Æqualis eſt Angulo CDE. Sed Angulus CED, Duplus eſt Anguli CFE, aut FCE: ſunt enim Anguli ad F, & C, Æquales; quia Æqualia ſunt Latera EF, EC. Ergò Angulus CDF, Duplus eſt vtriuslibet CFD, ECF Angulorum. Sed Angulus Externus BCD,

poteſt

poteſt duos Internos, & Oppoſitos ad D & F. Ergò BCD, Angulus poterit Tres Angulos Æquales ipſi F, ſiue ECA. Et ideò Angulus BCD, Triſectus erit, & Pars Tertia fiet: Aut Angulus F; aut Angulus ACE; ſiue Arcus DB, Triplus erit Arcus AE. Quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

MAnifeſtum igitur erit, quotieſcumque Linea comprehenſa Externa, ab eductâ Diametro, & Convexo Peripheriæ, Æqualis fuerit Semidiametro eiuſdem Circuli, pertinens ad Datum in Circumferentiâ Punctum, Angulum in concurſu Æqualem fieri Tertiæ Parti Anguli Externi in Centro, vt hic Angulus CFD, Pars Tertia Anguli BCD, ſeu Arcus BD, Triplus fiat obuerſi Arcus AE. Et optimè licebit ſic argumentari. Angulus in Centro Trifariàm ſectus eſt. Ergò Linea Externa pertingens ad Punctum in Peripheriâ Datum Semidiametro eſt Æqualis. Vel è conuerſo; Ex eo quòd Linea Externa pertingens ad Punctum in Peripheriâ Datum Semidiametro Æqualis eſt. Ergò Angulus in Centro Æqualiter Trifariàm ſectus eſt, vel Arcus illi obverſus.

ADNOTATIO.

CRedebant Antiqui Triſectionis Anguli cujuslibet Plani effectionem ad Solidum pertinere Genus; vnde Pappus lib. 4. Propoſitione 35. ſic ait.

Datum quidem Angulum, vel Circumferentiam Tripartitò ſecare, Solidum eſt, vt antè oſtendimus; Sed Datum Angulum, vel Circumferentiam ſecare in Datam Proportionem, Lineare eſt, &c. ſic ille.

At non Antiqui tantùm, ſed omnes quotquot fuêre Mathematici hactenùs in eandem iuêrunt ſententiam. Et vt alios recenſere pertranſeam, Albertus Girard Geometra, & in Algebricis verſatiſſimus, in Opuſculo illo Gallico Idiomate conſcripto, *Invention nouuelle en l'Algebre*, edito 1629. in 4°. Capite de Æquationibus Ordinatis, in hæc prorumpit verba, paginâ 32. (*Il eſt impoſſible de couper tout Arc propoſé en 3. ſans vſer d'autres lignes que de la Droicte, et Circulaire.*)

In hoc quàm longè à vero abſit, iam patet; & ampliùs patebit infrà, vbi ſumus oſtenſuri aduerſus Pappum, etiam in Analogicâ Sectione Anguli, Genus Planorum non immutari; at per illud omnia abſolui legitimè.

PROPOSITIO DECIMA.

PROBLEMA DECIMVM.

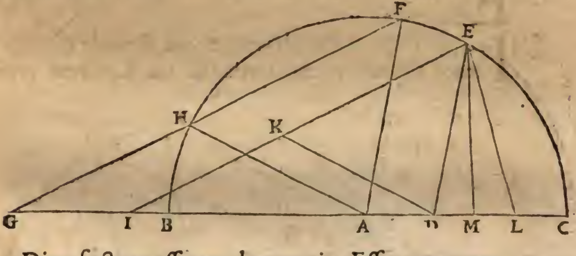
Diametrum Circuli ita continuare, vt ſit Continuatio ad Semidiametrum adjunctam Continuationi, ſicut Quadratum Semidiametri ad Quadratum continuatæ Diametri.

Eſt Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propoſitione xix.

ANNI vltra Seculi trientem recurrunt, ex quibus mihi Venetijs agenti, Apodixis oſtenſa fuerat, in quâ Profeſſores duo Clariſſimi aſſerebant noluiſſe, imò etiam (pro eorum ingenuitate) nequiuiſſe eiuſmodi Propoſitionis interpretationem exhibere; vel quia alijs detinerentur, vt ſuppono; vel quia illis nimia Authoris videbatur elegantia, id eſt obſcuritas; vel certè quia

hærebat inconceſſo Poſtulato, & abſque fructu labor apparebat. At ipſemet Author hæc, & alia non-nulla Problemata ad Heptagoni legitimã direxerat deſcriptionẽ. Non inutile verò aut injucundum erit (excluſo illo Poſtulato) illam, & reliquas huius generis Propoſitiones ad legitimam Geometriæ formam reuocare: vt inde omnia Supplementi Vietæ Problemata, à nullo Geometrarum rationabiliter repudiari poſſint tanquam exorbitantia; & verè Inſtaurata Geometria ab omnibus agnoſcatur: Quod fuit noſtri huius Opuſculi intentum.

Sit ſub Centro A, Diametro BC, Circulus: Et CD ſumatur pars Diametri Triens, & Semicirculi Arcus CE Triens: Ductæ ED, Parallela eidem fiat AF, & à Puncto F, agatur FG ſecans Peripheriam in H, ita vt HG, Semidiametro AC fiat Æqualis, (hæc illa effectio deſiderabatur in Geometriâ, & Mechanico ſuſtentabatur opificio, quam nos in integrum reſtituimus:) Ipſi verò FG, agatur Parallela EI, ſecans CG in I.

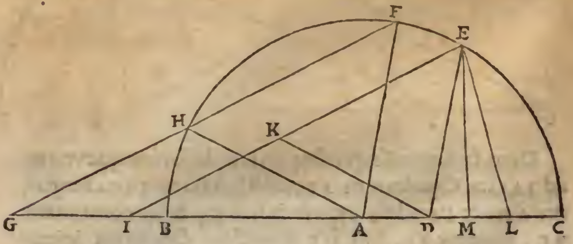


Dico factum eſſe quod oportuit; Eſſe namque vt IB, ad IA: ita Quadratum AB, ad Quadratum IC: iungatur AH, & Parallela agatur ipſi DK, & in continuatâ BC, ponatur EL, ipſi DE Æqualis. Quoniam igitur

Trianguli GHA, Crura GH, & HA, ſunt Æqualia, & à Baſis Termino A, educta eſt AF, ipſi GH Æqualis; Angulus FAC, fit Triplus Anguli HAG. Triangulis autem GHA, HAF, Similia ſunt Triangula IKD, KDE, Et Triangulum Æquicrurum eſt IKD. Sed conſtructum quoque eſt Æquicrurum Triangulum DEL, & ſunt Crura DE, EL, Cruribus IK, KD, Æqualia, & Angulus EDL, ſeu ELD, Anguli KID, ſeu KDI, eſt Triplus. Quare Cubus ex ID, Minùs Solido Triplo ſub ID, & Quadrato ex IK, ſeu DE, eſt Æqualis Solido ſub DL, & eidem Quadrato ex DE. Eſt autem AD, Triens Semidiametri AC, Et cùm ex E, cadit in Diametrum Perpendicularis EM, fit DM, Sextans Semidiametri: Dodrantem verò Quadrati ex AB, Æquabit Quadratum ex EM, quod quidem Quadratum ex EM, adjunctum Quadrato ex DM, valet Quadratum DE. Quadratum igitur ex DE, Æquat Dodrantem Quadrati ex AB, plùs Triceſimâ ſextâ eiuſdem.

[a] ET eſt Quadratum ex AB, ad Quadratum ex DE, ſicut 9 ad 7.

[b] Itaque Triplum Quadratum ex DE, Æquale eſt Quadrato Septupartienti tertias ex AB. Solidum verò



ſub DL, & Quadrato ex DE, Æquabitur Cubo Septupartienti Viceſimas ſeptimas ex AB. Quare Cubus ex ID, Minùs Solido ſub ID, & Quadrato Septupartiente Tertias ex AB, Æqualis eſt Cubo Septupartienti Viceſimas ſeptimas ex AB.

Atque hoc eſto Primum Illatum.

SCHOLII PARS PRIMA.

[a] *Et eſt Quadratum ex* AB, *ad Quadratum ex* DE, *ſicut* 9. *ad* 7.
[b] *Itaque Triplum Quadratum ex* DE, *Æquale eſt Quadrato* $\frac{7}{3}$ *ex* AB.

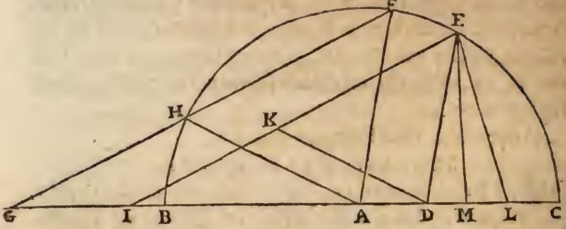
Sumitur vtriuſque termini Pars Tertia, rationis nimirum 9. ad 7. Ergò DE Quadratum, ter Æquatur AB Quadrato $\frac{7}{3}$ Solidum verò ſub DL, & Quadrato DE, Æquabitur Cubo $\frac{7}{27}$ AB: Nam Quadratum $\frac{7}{3}$ ex AB, in AB, quæ Tripla eſt DL, facit Triplum Solidum ex DE, Quadratum in DL, hoc eſt Quadratum $\frac{7}{9}$ ex AB, in AB Solidum, fit Triplum Solido DE, Quadrati in DL. Tertia igitur Pars illius, id eſt Cubus $\frac{7}{27}$ ex AB, Æquatur DE Quadrato, in DL. Quare

$$\left.\begin{array}{l}\text{ID Cubus}\\ -\text{ID in AB Q.}\ \frac{7}{27}\end{array}\right\}\text{Æquatur AB Cubo } \frac{7}{27}$$

Eſt enim Quadratum AB $\frac{7}{3}$ idem quod Triplum Quadratum ex DE (ex Propoſitione xvi[a] eiuſdem Supplementi Vietæ, & in Algebrâ Petri Herigonij in ſertâ ad 23. Propoſitionem) ſunt duo Triangula Iſoſcelia, Anguluſque Secundi eſt Anguli ad Baſim Primi Triplus, & Latera Æqualia ſunt. Ideò Sequitur, quòd

$$\left.\begin{array}{l}\text{ID Cubus}\\ -\text{ID in AB Q.}\ \frac{7}{27}\end{array}\right\}=\text{AB Cubo } \frac{7}{27}$$

Et hæc pro Illati Primi intelligentiâ clariore.



SEQVITVR AVTHORIS TEXTVS.

[c] OMnia ea Solida ſumantur Vicies ſepties. Ergò Cubus Vicies ſepties ex ID, Minùs Solido Ter & ſexagies ſub ID, & quadrato ex AB, æquatur Cubo Septies ex AB. Quâ æqualitate ad Analogiam reuocatâ, eſt vt quadratum ex ID Nouies, Minùs quadrato Vicies ſemel ex AB, ad Quadratum Septies ex AB, ita AB, ad Triplam ID. Et verò quadratum ex ID, valet Quadratum ex IA, & quadratum ex AD, vnà cum eo quod fit ſub AD, & IA Bis. Ipſa autem AD, eſt Triens AB. Quare quadratum Nouies ex ID, valet quadratum Nouies ex IA, Plùs eo quod fit ſub IA, AB Sexies, Plùs quadrato Semel ex AB. Eſt igitur vt quadratum Nouies ex IA, Plùs eo quod fit ſub IA, & AB Sexies, Minùs quadrato Vicies ex AB, ad quadratum Septies ex AB, ita AB ad compoſitam ex AB, & Triplâ IA. Quâ Reſolutâ Analogiâ, cùm quæ fient Solida, diuiſionem quæq; à Vicenario ſeptenario numero accipient, Cubus ex IA, Plùs Solido ſub AB, & quadrato ex IA, Minùs Solido duplo ſub IA, & quadrato ex AB, Æquatur Cubo ex AB.

Atque hoc eſto Secundum Illatum.

SCHOLII PARS SECVNDA.

[c] *Omnia ea Solida ſumantur Vicies ſepties.* Ergò

ID Cubus 27.
— ID, 63. in AB Q. 7. } Æquatur AB Cubo 7.

Reuocatâ ad Analogiam Æqualitate, Erit

vt ID Q. 9.
— AB Q. 21. } ad AB Q. 7. Ita AB ad ID, Triplam.

Nam ex Analogiæ Reſolutione, ſecundùm Artis Præcepta, Æqualitatem reſtitui oportet. Sed ex Elementis,

ID Q. valet { IA Q. + AD Q. } + IA in AD Bis,

AD verò Triẽs eſt AB. Igitur ID Q. 9. ſunt { IA Q. 9. + IA in AB, 6. + AB Q.

Ideò, Erit

vt IA Q. 9.
+ IA in AB, 6.
+ AB Q. 20. } ad AB Q. 7. Ita AB, ad ID Triplam.

Hoc eſt ad compoſitam ex AB, & Triplâ IA. Quâ Reſolutâ Analogiâ, & Solida diuiſa per 27. Erunt,

IA Cubus 27.
+ IA Q. in AB 18.
— IA in AB Q. 60.
+ AB in AI Q. 9.
+ AB Q. in A 6.
— A Cubo 20. } Æqualia Cubo AB 7.

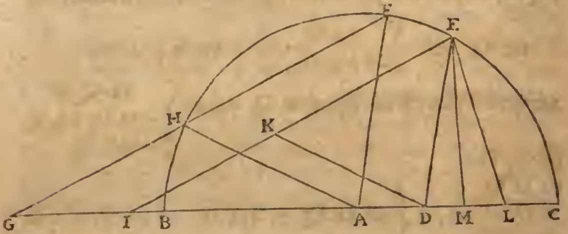
Factâ deinde Homogenearum partium tranſlatione (ex Arte in Iſagogicis traditâ, quâ non immutari Æqualitatem conſtat) in contrarias adfectiones, Erunt

$$\left.\begin{array}{ll} 1\text{A Cubus} & 27. \\ +1\text{A Q.} & 27.\text{ in AB} \\ -\text{AB Q.} & 54.\text{ in AI} \end{array}\right\}\text{Æqualia AB Cubo } 27.$$

Et omnia diuiſionem accipiant per 27. Erunt,

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{A Cubus} \\ +1\text{A Q. in AB} \\ -1\text{A in AB Q. Bis.} \end{array}\right\}\text{Æqualia AB Cubo.}$$

Et hæc pro Illato Secundo clariùs explicato.



SEQVITVR AVTHORIS TEXTVS.

[d] EAdem autem Æqualitas rurſus ad Analogiam reuocetur, Erit igitur,

$$\text{vt} \left.\begin{array}{l} 1\text{A} \\ -\text{AB} \end{array}\right\}\text{ad AB: Ita AB Q.} \left\{\begin{array}{l} \text{ad 1A Q.} \\ +1\text{A, in AB Bis.} \end{array}\right.$$

Et per Diæreſin,

$$\text{vt} \left.\begin{array}{l} 1\text{A} \\ -\text{AB} \end{array}\right\}\text{ad 1A. Ita AB Q.} \left\{\begin{array}{l} \text{ad 1A Q.} \\ +1\text{A, in AB Bis.} \\ +\text{AB Q.} \end{array}\right.$$

Et

Et interpretando,

vt IB, ad IA: Ita AB Q. ad IC Q.

Quod tandem erat Demonſtrandum.

SCHOLII PARS POSTREMA.

[d] *Eadem Æqualitas ad Analogiam reuocetur*, Erit

$$\text{vt}\ \left.\begin{matrix}\text{IA}\\ -\text{AB}\end{matrix}\right\}\ \text{ad AB: Ita AB Q.}\ \left\{\begin{matrix}\text{ad IA Q.}\\ +\text{IA, in AB 2.}\end{matrix}\right.$$

Nam Reſoluendo,

$$\left.\begin{matrix}\text{IA Cubus,}\\ +\text{IA Q. in AB 2.}\\ -\text{AB in AI Q.}\\ -\text{AB Q. in AI.}\end{matrix}\right\}\ \text{æqualia redeunt vt ſuprà, ipſi AB Cubo.}$$

Hoc eſt per Homogenearum ſubductionem Partium, aut Graduum depreſſionem.

$$\left.\begin{matrix}\text{IA Cubus,}\\ +\text{IA Q. in AB}\\ -\text{IA in AB Q. 2.}\end{matrix}\right\}\ \text{æquantur AB Cubo.}$$

Et per Diæreſin Analogiæ illius,

$$\text{vt}\ \left.\begin{matrix}\text{IA}\\ -\text{AB}\end{matrix}\right\}\ \text{ad IA. Ita AB Q.}\ \left\{\begin{matrix}\text{ad IA Q.}\\ +\text{IA in AB 2.}\\ +\text{AB Q.}\end{matrix}\right.$$

Et per interpretationem,

vt IB, ad IA: Ita AB Q. ad IC Q.

Quod erat oſtendendum.

ADNOTATIO.

SEquentia etiam Problemata excuſari poterant: At quia Exemplaria Authoris vix reperiuntur, & niſi iterùm ſub prælo committantur vniuerſa eiuſdem Opera: quemadmodùm paucis abhinc annis Elzeviriana ſpem fecerat Typographia, magno poſterorum præiudicio id ſuccedet. Herigonius ad XVIII. huius Supplementi ſubſtitit, nec reliqua proſequutus, noſtræ huic Inſtaurationi onus videtur reliquiſſe, vt integrè ſuppleatur, & intra Geometricos fines reducatur.

PROPOSITIO VNDECIMA.

PROBLEMA VNDECIMVM.

Conſtituere Triangulum Æquicrurum, vt differentia inter Baſin, ad alterum è Cruribus ſit ad Baſin; ſicut Quadratum Cruris ad Quadratum Compoſitæ ex Crure, & Baſe.

Eſt Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propoſitione XX.

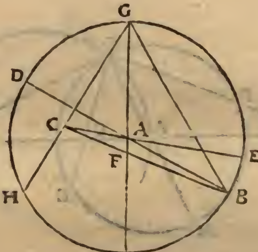
EXponatur Circulus ſub A Centro, Diametro quacumque BC, & continuetur CB Diameter in D, ita vt DB, ſit ad AD, ſicut Quadratum ex AB ad Quadratum ex DC. Ex D, poſteà ponatur in Peripheriâ Recta DE ipſi AB æqualis, & iungatur AE.

Dico Triangulum DEA, eſſe quale quæritur. Crura enim ED, EA, æqualia ſunt. Eſt autem DB Differentia inter Baſin DA, & Crus AC, ſeu AB. Ipſa verò DC, Compoſita eſt ex DA Baſe, & AC, ſiue AB Crure. Conſti-

PROBLEMA SEXTVM.

Datis vt ſupra, & alterum punctorum ponatur extra, & reliquum intra peripheriam inductis diametris. illud idem efficere.

Sint puncta, B in peripheria, C intra circulum, & ducta BC, per centrum BAD, CAE, ſecetur BC,

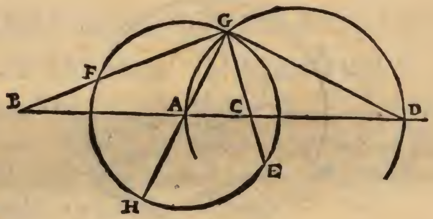


in F, in ratione BD, ad CE, & per F punctum & centrum circuli linea FAG agatur. Dico quod G punctum problema efficit: in cuius oſtenſionem veniunt quæ ſuperius repetita ſunt, vt concludatur GB, GH æquales eſſe, vt opus non ſit denuo eadem inculcare.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Datis circulo & duobus punctis B, C, *altero extra, altero intra in eadem diametro: illud idem perficere.*

Fiat vt differentia B A, ſupra A C, ad ipſam A C: ita tota B D, ad C D, & à puncto D agatur tan-

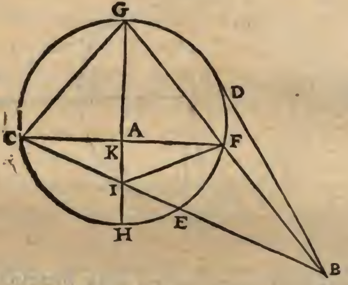


gens in G. Dico punctum G efficere quæſitum: ductis namque lineis vt in ſchemate, rectus fiet angulus D G A: ergo per lemma quintum anguli B G A, C G A ſunt æquales: & conſtat propoſitum.

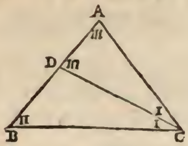
PROBLEMA OCTAVVM.

Iiſdem datis, alterum punctorum ſit in peripheria, alterum vero extra, ſed in diametris diuerſis: illud idem perficere.

SIt circulus, & puncta B, C, hoc in peripheria, illo intra circulum, ducatur tangens BD, &



iuncta BC ſecet in E circulum, cuius comprehenſa portio DE, bifariam in F, diuidatur, & iuncta FC, iterum in K, diuiſa, & ab eo puncto, per centrum A agatur KAG. Dico punctum G efficere problema: nimirum ductis lineis BG, CG, angulum BGC diuiſum eſſe bifariam per diametrum GA: nam ex vi triangulorum CIF, & CGF, breuiter conuinci poteſt: ergo ex B, C, punctum reflexionis ſignauimus. Quod erat faciendum.



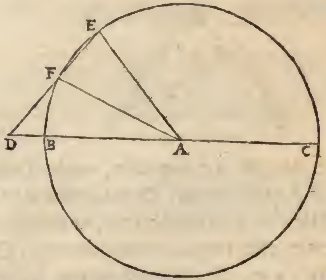
Recta CD, ipſi AB, vel AC æqualis, vnde Triangulum ACD, rurſus ſit æquicrurum: Crura enim CA, CD, habet æqualia. Dico in Triangulo ACD, vtrumque Angulorum ADC, DAC, eſſe Triplum Anguli DCA. Quoniam enim Angulus BAC, eſt Anguli ABC Seſqui-alter, vel ACB. Ideò qualium Partium Angulus ABC eſt Duarum; talium BAC, eſt Trium. Sed earundem, & Angulus ACB, eſt Duarum, cùm ſit Angulo ACB Æqualis: atque adeò Tres Anguli Trianguli ABC, hoc eſt Duo Recti æſtimantur Septem. Quoniam autem Æquicrurũ ſit quoque Triangulum ACD habens videlicet Crus CD Cruri CA Æquale. Ideò qualium Angulus DAC, taxatus eſt Trium partium: talium erit totidem Angulus ADC, atque adeò Angulus ACD, Pars Vna, cùm talium Duo Recti ſint Septem. In Triangulo igitur ADC, Vterque Angulorum DAC, ADC, eſt Triplus reliqui ACD. quod erat Demonſtrandum.

PROPOSITIO DECIMA-QVINTA.

PROBLEMA DVODECIMVM.

In Dato Circulo Heptagonum Æquilaterum, & Æquiangulum deſcribere.

Eſt Vietæ, in Supplemento Geometriæ, Propoſitione XXIV.



SIt datus Circulus, cuius Centrum A, Diameter BAC. In eo oporteat Heptagonum Æquilaterum, & Æquiangulum inſcribere. Diameter BC, continuetur in D, ita vt DB, ad DA ſit, vt quadratum AB, ad quadratum ex DC, Et in Circumferentiâ ponatur DE Æqualis Semidiametro. Dico EB, eſſe Arcum Heptagoni, hoc eſt Partem Circumferentiæ Septimam. Secet ipſa DE, Circulum in F, & iungantur Semidiametri AE, AF. Eſt igitur Triangulum DEA, Æquicrurum, ita conſtructum, vt Differentia Baſis & Cruris ad Baſin eſt, ſicut Quadratum Cruris ad Quadratum Compoſitæ ex Baſe & Crure. Quare Recta AF, ipſi Cruri Æqualis, ſecat Bifariàm Angulum ad Baſin, ideòque qualium Duo Recti ſunt Partium Septem; talium Angulus EAD, eſt Duarum. Qualium verò Quatuor Recti ſunt Septem, id eſt tota Circumferentia; talium Angulus EAD, eſt Vna. Ipſius autem Anguli EAD, amplitudinem definit Arcus EB. Quare Arcus EB, Septima eſt Pars Circumferentiæ totius. Subtendatur igitur Septies. Et erit in Circulo Dato inſcriptum Heptagonum Regulare. Quod erat faciendum.

ADNO-

ADNOTATIO.

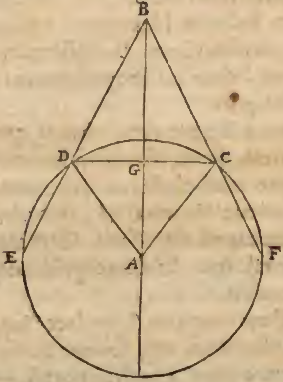
PRæmiſſas continuauimus Propoſitiones, vt vnà intelligatur ab Authore ſic ordinatas fuiſſe, vt in Circulo inſcriberetur Heptagonum: Quamuis perfecta deſcriptio ab eodem non tradatur, propterea quòd eius Poſtulatum claudicet. Modò verò, quùm ex noſtris ſuperiùs deductis rectà incedere Geometria videatur, legitima etiam habetur Heptagoni deſcriptio, contra Ioannem Kepplerum virum Doctiſsimum, qui Libro Harmonicorum Primo ad Propoſitionem 45. hiſce inſurgebat verbis, p. 32.

Heptagonus, & Figuræ ab eo omnes, quæ Numerum Laterum ex Primis (ſic dictis) vnum habent, earumque Stellæ, totæque adeò claſſes ab ijs deriuatæ, extra Circulum deſcriptione Geometricâ carent: in Circulo etſi Laterum Quantitas eſt neceſſaria, illam tamen ignorari æquè neceſſe eſt. &c. Et deinceps in corpore Propoſitionis p. 34. addit.

Itaque nullum vnquam Regulare Septangulum à quoquam conſtructum eſt, ſciente & volente, & ex propoſito agente: nec conſtrui poteſt ex propoſito: ſed benè fortuitò conſtrui poſſet: & tamen ignorari neceſſe eſt, ſitne conſtructum, an non. Hæc ille. Crediderat fortaſſe Kepplerus ex eo quòd ſublime illud Vietæ ingenium ad perfectam Heptagoni delineationem non peruenerat, non eſſe in gradu Poſſibilium, aut ex Arte exhibendorum. At pro eius in Philoſophando libertate, ſi adhùc ſupereſſet, quin ſententiam retractaret non ambigimus; quòd autem non ad ſolam in Circulo inſcriptionem coarctemur, aliâ perficiemus viâ, priùs hoc præmiſſo Lemmate.

LEMMA SECVNDVM.

Si à Puncto extra Circulum Dato, per Extrema Chordæ, ducantur ſecantes Lineæ Circulum, Partes intrà, & extrà inter ſe comparatæ, Æquales erunt; quùm ab eodem Puncto ad Centrum, Linea Chordam ad Rectos Angulos, aut Æqualiter diuidet.



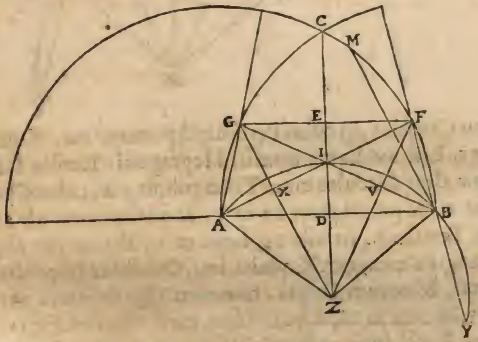
SIt Circulus, cuius Centrum A, Punctum extra Datum B, & in Circulo Chorda DC, per cuius Extrema Puncta DC, duæ veniant BDE, BCF, & tertia BGA, per Centrum taliter, vt ad Rectos inſiſtat Angulos in G, aut Bifariàm diuidat DC. Dico quòd Partes Linearum BE, BF, tum extra, tum intra Circulum Æquales ſunt, ſcilicet BD, BC, extrà: DE, CF, intrà. Nam iunctis DA, AC, in duobus Triangulis DAG, CAG, ex Hypotheſi Anguli Recti ad G, omnes Lineæ Æquales coniunguntur. Ergò Anguli DAG, CAG Æquales, & duorum Trian-

gulorum BAD, BAC, etiam Baſes BD, BC, erunt Pares, Et cùm duo Rectangula EBD, FBC, Æqualia ſint ſub Æqualibus BD, BC; Etiam BE Æqualis fiet BF, Et reliquæ DE, CF. Quod erat intentum.

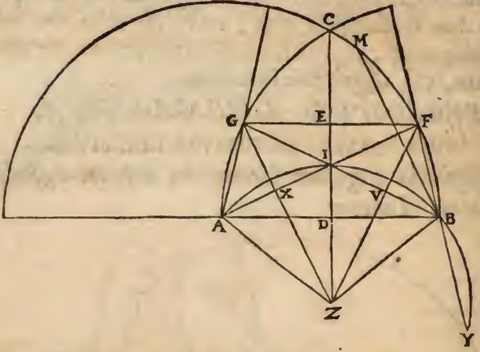
PROPOSITIO DECIMA-SEXTA.

PROBLEMA DECIMVM-TERTIVM.

Heptagonum Regulare Geometricè deſcribere, ſuper Datam Lineam.



SIt Linea AB, & ex eius diſtantiâ à Punctis A B, duæ Circuli portiones AC, BC, ſcribantur, ſe mutuò ſecantes in C, à quo Puncto demittatur Perpendicularis CD, Et Bifariàm diuidatur in E, per quod Punctum ipſi AB, Parallela fiat FG, quæ Portiones Circulorum in FG ſecabit, & ducta AF, ſiue BG ſe ſecantes in I. Dico Triangula ABG, ABF, eſſe Iſoſcelia, & illorum Angulos ſupra Baſin BF, aut AG (alter ſufficit ad intentum oſtendendum) eſſe ad Angulum Verticis in Ratione Triplâ. Facto igitur in A Centro, interuallo AB, ſcri-

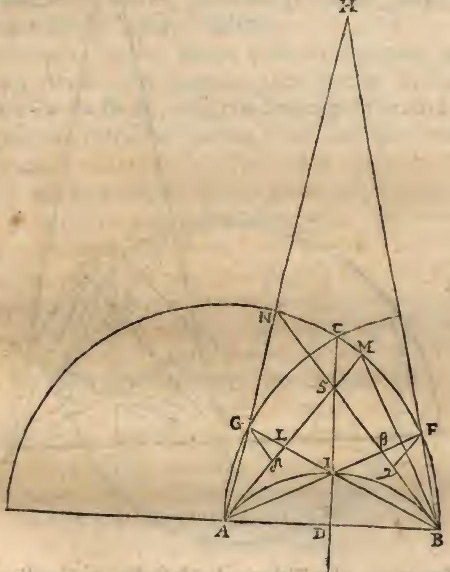


batur Circulus, in cuius Peripheriâ ponatur FM, Æqualis BF. Erit BM Latus quæſiti Heptagoni. Iterùm ſcribatur alter Circulus circa Triangulum AIB, cuius Centrum Z, & producatur FB in Y, & ad Centrum ab eodem Puncto F, ſit alia FZ, ſicut ex G, alia GZ, & cùm Triangula GEZ, FEZ, Æqualia ſint, Quod facilè probari poteſt, & eorum Dupla, nimirum Quadrilatera BFIZ, AGIZ: Et cùm AI, IB, Æquales ſint, earũ Semiſſes Æquales erunt. Ergò Linea FV, diuidit Bifariàm IB. Ergò ex Lémate, Lineæ FA, FY, & partes earum, tum intra, tum extra Circulum Æquales fient. Sed in Triangulo ABI Iſoſcele, Angulus BIF Externus, Duplus eſt vtriuſlibet Interni, & Oppoſiti IAB, aut IBA. Ergò Angulus FBI, erit etiam Duplus eiuſdem IBA. Totus igitur FBA Angulus, Triplus fit Anguli IBA, ſiue IAB. At in Iſoſcele, Anguli ſupra Baſin Æquantur. Igitur in A facto Centro, & Interuallo AB, ſi ſcribatur Circulus, Chorda BF, quæ Angulo in Centro A opponitur, erit Pars Decima-quarta Circumferentiæ, Et eius Dupla BM, Septima Circuli

Pars. Circumducatur & BM Septies, habebitur Heptagonum legitimè, Geometricè, ac regulariter ſcriptum. Quod erat faciendum.

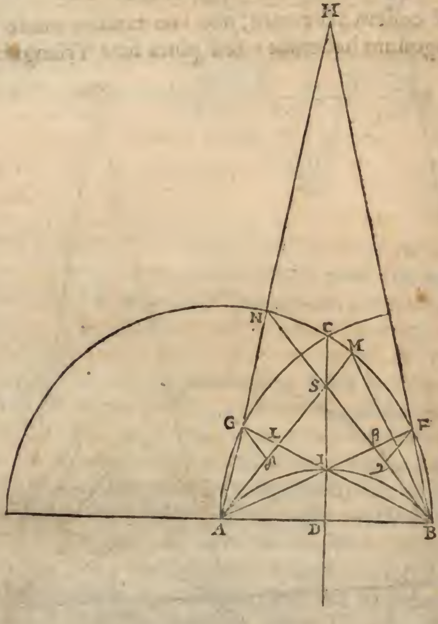
CONSECTARIVM.

IN eodem Schemate, non vno tantùm modo Heptagonum habemus ; ſed plura ſunt Triangula, ad



efformandum illud idem Heptagonum apta. Nam præter duo BAF, ABG, ductis Lineis AG, BF, Nouum

Iſoſceles fiet AHB. Et cùm Anguli ſupra Baſin A, & B, Æquentur; erit etiam H, Angulus Æqualis FAB, ſiue GBA. Et ſi ducãtur AM, BN, & Fγ Parallela AM: aut Bδ, Parallela



BN; Sex erunt alia Triangula Iſoſcelia, & Similia BSL, ASβ, BFβ, AGL, Fβγ, GLδ, Bina & Bina Æqualia & Similia. Nouem igitur Triangula expoſuimus ipſi Kepplero aduerſanti, quæ Heptagonum deſcribunt.

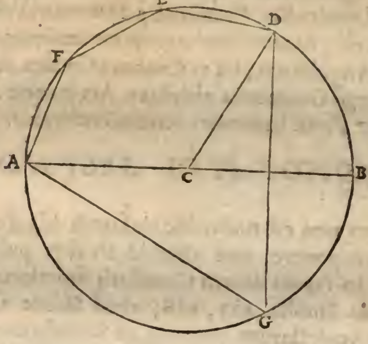
PROPOSITIO DECIMA-SEPTIMA.

PROBLEMA DECIMVM-QVARTVM.

Enneagonum Regulare Geometricè deſcribere.

EX ſuprà à nobis Demonſtratis, hoc adeò facilè efficietur; vt vix, quod reliquum eſt, inter Problemata locum habere debeat.

Deſcripto Circulo, ſtatim habetur Hexagoni Latus; Deinde Arcus, ſiue Angulus ACD, ſecetur Trifariàm, vt Pars Tertia ſit AF, quæ erit Enneagoni vnum Latus. Et quùm id clariſſimè pateat, nouâ non eget Demonſtratione.



ADNOTATIO PRIMA.

QVùm de Heptagono diſputaret Kepplerus, verum eſſe aſſerebat, ad inſcriptiones Figurarum, Spe-

cioſam Logiſticen Geometris parùm adferre ſubſidii; Et Opus Algebricum nihil prodeſſe, vt Lineas quæſitas in Circulo exhibere poſſent: in quo ſanè ab eo minimè diſſentimus. Inueniunt enim Algebrici quotquot Media libuerit inter Extrema in Analogiâ continuá; At in Magnitudine Lineari quæſitam Quantitatem numquam aſſignabũt: Continetur enim ſub involucris Poteſtatum Graduúmve: At in Numeris determinare accuratè Facultas Numerorum recuſat. Quando proponunt igitur Algebriſtæ,

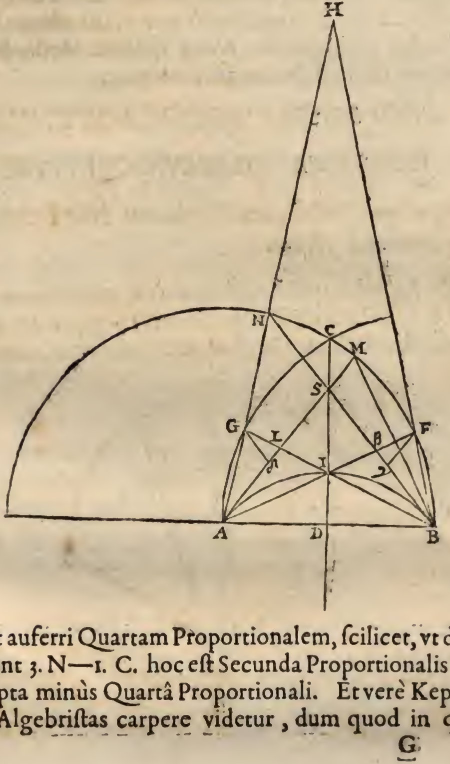
3. N—1. C.
5. N—5. C.+1. Q. C.
7. N—14. C.+7. Q. C.—1. Q Q. C.

vel ſimile aliquod compoſitum pro diuiſione alicuius Numeri, accuratum nequeunt exhibere Quotum: Sed quùm Magnitudini Continuæ à Symmetriâ nihil officiat penitùs, Lineas benè accuratas trademus, ex diuiſione Angulorum; ita vt Canones Sinuum, & alios ab ijs deriuatos Geometria abſoluat. Ars itaque Angulos diuidendi Vietæ Inuentori omninò referatur.

ADNOTATIO SECVNDA.

INſtituti non eſt noſtri hîc eiuſmodi Algebrica Præcepta exponere, quæ abundè ab alijs publicè habentur. In Figurâ autem Corollarij ſuperioris, ſi Duo Triangula Similia ABF, BFβ, aliud Simile aſſumant; & more Analyſtarum, ponatur AB Semidiameter, Vnitas Prima Proportionalium. Et BF Secunda, quæ dicatur 1. N. ſeu 1. ℞. Tertia Proportionalis Continua fiet Fβ & ſignatur 1. Q. ſiue 1. 3. Quarta erit βγ, & notabitur 1. C. Quare ſi Tres Lineæ Æquales 1. N. ſiue BF, continuentur in

in directum in BP, & ab aggregato illarum auferri intelligatur Quarta illa Proportionalis $\beta\gamma$, ſiue 1. C. Relinquetur Chorda Arcus BN, pro Chordâ Tripli Arcus BF, FM, MN. Et hoc eſt illud quod Algebriſtæ petunt, cùm iu-



bent auferri Quartam Proportionalem, ſcilicet, vt dum dicunt 3. N—1. C. hoc eſt Secunda Proportionalis Ter ſumpta minùs Quartâ Proportionali. Et verè Kepplerus Algebriſtas carpere videtur, dum quod in quæ-

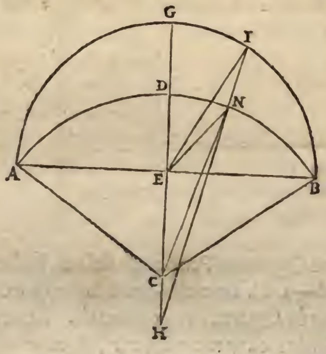
ſtione eſt ſupponunt: ita vt ſi Angulum Trifariàm, Quintù, aut Septufariàm, vel quâcunque velint diuiſione perficere per ſuas Poteſtates, nunquam ad Continuum deuenire poſſunt, etſi quàm proximè. Nos verò qui Geometrica Geometricè exponenda cenſemus, diuiſiones etiam Angulorum per Plana omninò perficiendas proponimus, Nouâ quidem Methodo. Et Primum de Triſectione ſit Problema.

PROPOSITIO DECIMA-OCTAVA.

PROBLEMA DECIMVM-QVINTVM.

Angulum Rectilineum Trifariàm Nouâ Methodo Geometricè ſecare.

SIt Angulus quilibet Planus ACB, quem oporteat in Æquas Partes Trifariàm ſecare. Iungatur AB, quę in E Bifariàm diuidatur. Scribatur Semicirculus Centro E &



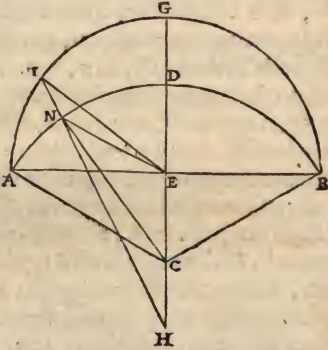
interuallo AE, aut EB, Et in Peripheriâ ponatur BI, Pars Tertia, quod vnicâ fiet aperturâ Circini Geometricè. Ductâ verò alterâ Diametro, CE, in G producatur etiam in oppoſitam partem, ita vt EH Æquetur EG, à Puncto H iungatur HI, ſecans partem Peripheriæ ADB, ſiue Anguli C Dati, in N. Dico quòd Angulus ACB erit ſectus Trifariàm à Lineâ CN, vt Angulus BCN, Tertia fiat Pars Anguli ACB, Iungantur Lineæ EN, CN. Quoniam igitur Lineæ EI, EH, Æquales ſunt, Anguli ſupra Baſin H, & I Æquantur, quos Externus GEI adæquat, Si apponatur Angulus NEI, erit totus Angulus DEN, Æqualis Tribus EHI, EIN, NEI. At duobus hiſce poſtremis eſt Æqualis Angulus ENH. In Triangulo igitur ENH, Anguli ENC, CNH, EHN, Æquales ſunt Externo Angulo DEN. At duos Poſteriores CNH, EHN, adæquat Externus Angulus ECN. Igitur Externus Angulus DEN, Æqualis eſt Duobus Internis, & Oppoſitis ECN, ENC. Ergò Angulus DCN, ad N Punctum cum Lineâ HI, conuenit. Ideò quæ Pars eſt Angulus GEI, Semicirculi AGB, Eadem Pars erit Angulus DCN, Peripherię ADB, ſiue Anguli ACD. Et quæ Pars IEB, Semicirculi, Eadem Pars NCB, Peripherię ADB. Sed IEB, Pars eſt Tertia Semicirculi. Ergò & Arcus NB, ſiue Angulus NCB, Peripherię ADB, ſiue Anguli ACD, eſt Pars Tertïa. Igitur à Lineâ HNI, Tertia Pars Anguli Dati ſecatur. Et factum eſt quod oportuit.

PROPOSITIO DECIMA-NONA.

PROBLEMA DECIMVM-SEXTVM.

Angulum quemlibet Rectilineum Quintuſariàm Æqualiter Geometricè ſecare.

SIt Angulus quilibet Planus ACB, cuius Quintam oporteat aſſignare Partem. Eadem vt ſuprà repeta-



tur Conſtructio, & Quinta Semicirculi Pars ſit AI. Iungatur EI, cui Æqualis fiat EH. Et ducta, HI ſecet Peripheriam ADE, ſeu Angulum ACB, in Puncto N. Dico Lineam HNI, Problema efficere, & Angulũ NCA Quintam auferre Partem totius ACB. Nec Noua erit Demonſtratio; quùm prorſus, vt in pręmiſſâ, Argumentari oporteat.

ADNOTATIO.

DEſcriptiones Heptagoni, ac Enneagoni præmiſimus, quia Diuiſio Anguli Plani tunc in Partes Ali-

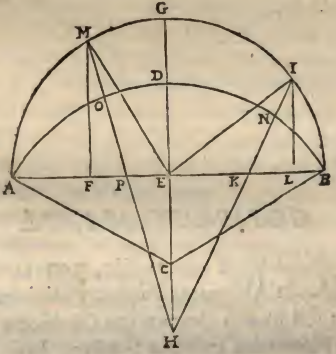
quotas efficietur, cùm in eaſdem Semicirculum priùs ſecare nouerimus.

PROPOSITIO VIGESIMA.

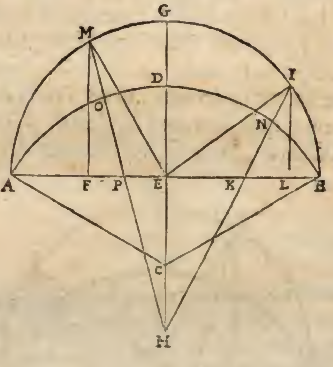
THEOREMA QVARTVM.

Angulus Rectilineus in Quotvis Partes ſecari contingat, Diuiſionum Lineæ in vnico Peripheriæ conuenient Puncto.

SIt Angulus Rectilineus quilibet ACB, diuiſus Quintufariàm, & iterùm diuiſus Trifariàm, Lineis HI, & HM. Dico has Lineas omnes concurrere in Puncto eodem H. In Peripheriâ Circuli eiuſdem, ſint æquales, aut fiant AC, CB, & ducta AB Bifariàm ſecetur in E, ſcriptóque Semicirculo AGB, in eo Tertia ſit aſſumpta Pars AM, cui reſpondeat de Angulo ACB, Tertia AO, & de Quintâ illius BI, huius ſit Relatiua BN. A Punctis MI,



Perpendiculares demittantur MF, IL, iunctiſque ME, IE, erunt Anguli EMF, EIL, Bifariàm à Lineis MH, IH diuiſi: Quod facile probabimus. Triangula enim HEK, ILK, Similia ſunt, & vi Parallelarum HE, IL, Anguli EHI, LIK Æquales. At Æquales ſunt EKI, EIH. Ergò EIL, diuiditur Bifariàm Lineâ HI. Similiter & eâdem formâ probabitur de altero EMF, & de quocunque alio Angulo. Igitur duo Anguli EMH, EIH, Æquantur Angulo MHI. Sed MEI, in Centro Duplus eſt Angulorum EMH, EIH. Ergò Duplus Anguli MHI. Ideò Angulus MHI, in Peripheriâ erit eiuſdem Circuli. Quod erat propoſitum.



CONSECTARIVM.

GEneraliùs itaque verum erit, non tantùm quùm Angulus in Aliquotas Partes, vt diximus, diuidendus fuerit: ſed in aliâ quacunque Diuiſione Analogicâ ad Genus Planorum Effectio ſpectet. Imò etſi Aſym-

metra Diuiſio accidat; nihilominùs noſtrâ hac Methodo efficietur. Hinc prorſus reiecta adparet ſententia Pappi, & aliorum aſſerentiū Analogicam diuiſionem Anguli Plani, ad Lineare ſpectaſſe Genus; & Triſectioné ad Solida. Quod omninò falſum ipſa manifeſtat Conſtructio.

ADNOTATIO PRIMA.

SI nouus Arcus circa AB deſcriberetur Centro facto inter H & E, neque in H, aut in C, Angulus minueretur, vel augeretur ACB; nihilominùs ex eadem HI, auferretur, tam ex nouo Arcu, quàm ex ADB, imperata Pars. Quare ante totius Anguli determinationem videtur Pars auferri poſſe imperata. Quod ad Paradoxi naturam accedit.

ADNOTATIO SECVNDA.

PRæceptis Arithmetices inſtructi, & quovis Artificio Logiſtices; dum ad condendos Canones Sinuum ſe conferunt, Pręciſionem obtinere nequeunt, Aſymmetriâ id prohibente, quæ quidem Geometriæ non officit: Ideò Lineas exhibebunt deinceps Geometræ benè accuratas, & Triſectione, Quintúve Sectione Æquale, nec vlteriùs neceſſe erit progredi. Quantùm poſteà ad vſum ſpectat, Arithmeticen Geometriæ præſtare libenter concedimus. Quod quidem hâc etiam Methodo exequi licebit, vt aiebat Vieta,

1. Ex Sectione Hypothetici Lateris, Mediâ, ac Extremâ Ratione, dabitur Perpendiculum Partium xviij°.

2. Et ex eo per Quintuſectionis opus, Perpendiculum inuenietur Partium iij°. xxxvj′.

3. Ex opere Triſectionis, habebitur Perpendiculum Partium xx°.

4. Et hinc iterùm Triſecando, Perpendiculum Partium vj°. xL′.

5. Deinde per Biſectionis opus, Perpendiculum Partium iij°. xx′.

6. Ex Differentiâ Perpendiculorum Partium iij°. xxxvj′. & Partium iij°. xx′. dabitur Perpendiculum xvj′.

7. Et ex repetitâ inde Biſectione habebuntur Perpendicula pro Minutis Primis, 8′. 4′. 2′. 1′.

Et ſi placet, vlteriùs ijſdem opportunis Effectionibus, ad Minutiora progredi poteris: oſtendiſſe ſufficiat, Geometricè, ad omnimodam Præciſionem Canonem extrui poſſe. Quod hactenùs erat ignoratum.

PROPOSITIO VIGESIMA-PRIMA.

PROBLEMA DECIMVM-SEPTIMVM.

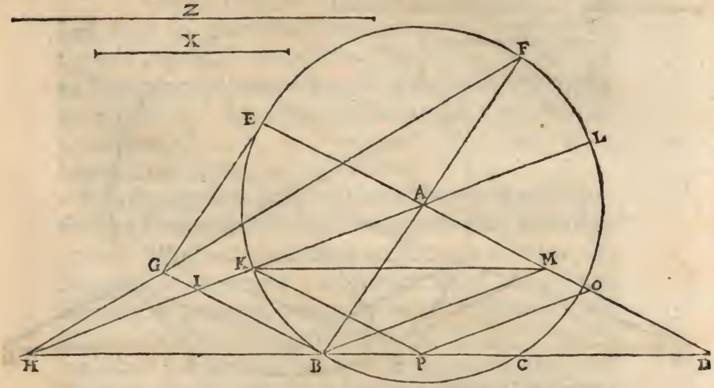
Duas Medias inter Extremas Lineas, in ſerie Quatuor Proportionalium, Geometricè reperire.

ANtiqui Sapientes ad hoc Problema referebant, & meritò, illud Famoſum de Cubi Duplicatione; quod quidem à nemine hactenus Geometricè abſolutum fuerat, quanquàm per genera diuerſa: Quæ omnia, vt à legibus exorbitantia Facultatis, non admiſerunt ſynceriores Geometræ: Et nos ſimul cum Vietæo Poſtulato reiecimus, oſtenſuri per germana Principia, & facilè perfici poſſe, vt ſequitur.

Sint itaque Extremæ Datæ z, & x Lineæ, inter quas oporteat Medias inuenire in Analogiâ Continuâ.

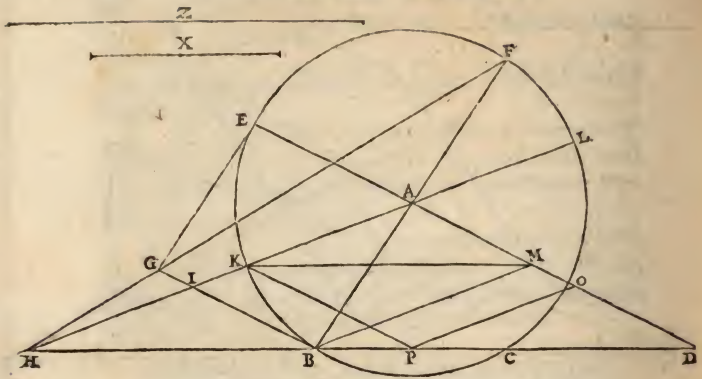
Ex Semiſſe z, tanquam Semidiametro, Circulus ſit BCL, in quo poſita BC, Æqualis x Minori expoſitæ, & Duplicetur in DC: ita vt BD, Dupla ſit BC. Deinde per

Centrum



Centrum ex D Puncto, ducatur DAE, cui à Puncto B, fiat Parallela BG. Vſque adhùc conſtructio Vietæ; cuius eſt eadem Propoſitio V^a. Supplementi. Herigonius in Albræ Supplemento Prop. I^a. etiam transfert illam; & alij alibi, qui in conſtructione benè ſe habent: deinde Mechanicè procedunt, cùm in A Puncto, fixam ponunt regulam, vt Pars eiuſdem inter BG, & CB, eductam, colligatur PO, Æqualis Semidiametro AB. Quæ quidem Effectio rejicienda prorſùs eſt. At noſtra intra Geometricos conſiſtit fines; Nimirùm.

A Puncto B, per Centrum A, altera ducatur Diameter BAF, cui ex E Puncto, Æquidiſtans fiat EG, occurrens BG, in Puncto G. Poſteà ex F, per G Punctum, altera agatur Linea FGH, conueiens cum CB eductâ in H Puncto (quod conuenire ſit neceſſe, facilè probari poteſt.) Et tandem ex H Puncto, per Centrum Circuli A, agatur HAL, ſecans BG, in I, & Circulum in K, Punctis. Dico quòd HI, erit Æqua-



lis Semidiametro KA, & quòd Proportionales erunt KL, HB, HK, BC.

Conſtructio itaque hęc prorſus Euclidea eſt, & Demóſtratio ſic procedit. Ducatur BM, Parallela HL, & à Puncto K, altera KP Parallela DA. Deinde à Puncto P, adhùc PO Æquidiſtans HL. Factâ hac pręparatione, Triangula BIH, POD, ſunt inter ſe, & toti Triangulo AHD Æquiangula, & Similia, ex vi Parallelarum, quod facile euinci poteſt. Si verò iungatur KM, fiet Æquidiſtans DH, & iterùm Triangulum AKM, tribus illis iam dictis Simile fiet. Sed in Parallelogrammo DMKP, Latera ex aduerſo æqualia ſunt pariter & in altero Parallelogrammo BMKH. Igitur Latus HB, Æquale euadit Lateri DP: vtrumque enim Lateri KM æquale eſt. Et cùm tria Triangula HBI, DPO, KMA, ſint Similia, Latera eorum erunt Homologa, & æqualia, ſcilicet HB, PD, KM. Ergò & reliqua Homologa erunt Æqualia Latera, id eſt HI, PO, KA. Sed KA, eſt Semidiameter Cir-

culi. Ergò HI, ipſi Semidiametro KA, vel BA Æqualis. Quare à Puncto A, extrà ducta eſt Linea AH, & Pars eius HI, intercepta à duabus Lineis BG, BH, Æquatur Semidiametro. Et hoc Geometricè inſtauratum, erat Demonſtrandum: Quod Vieta, Herigonius, & alij per Poſtulatum, ſiue Mechanicè deducebant.

Et in ſequentibus pro Complemento aſſumptæ Propoſitionis, Authores illi ſecundum Geometrię Regulas procedunt, dicuntur Proportionales eſſe continuè KL, BH, KH, BC: quarum Extremæ KL, BC, fuerant Datæ, reliquę duę inuentę, & quidem Geometricè BH, HK. Quoniam enim DA, BG, Parallelę ſunt conſtructæ, ideò eſt HI, ad HB: ita AI, ad DB. Eſt autem HI, ad KL: ſicut BC, ad BD, Simpli ad Duplum. Quare eſt vt KL, ad HB: ita AI, ad BC. Ipſi autem AI, addatur HI, & auferatur KA, quas Æquales eſſe Demõſtrauimus. Igitur à Puncto H, extra Circulum ſumpto, ſunt duæ Rectę ipſum ſecantes, & quod ſub Exterioribus earumdem Partibus videlicet HB, & HK, fit; Æquale eſt ei Rectangulo quod fit ſub Interioribus Partibus KL, & BC. Ergò Exteriores Partes permutatim acceptę ſunt continuè Proportionales, nimirùm KL, HB, HK, BC. Datis igitur Duabus Extremis Lineis Z, & X, Duę ſunt Medię in Analogiâ Continuâ inuentę. Quod erat faciendum.

ADNOTATIO.

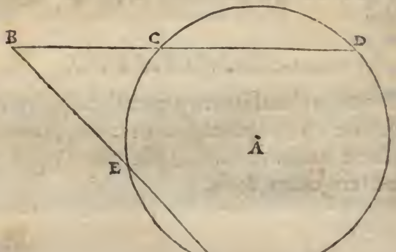
AD comprehenſionem prę miſſę completam, neceſſarium eſt Propoſitionem IV. Supplementi Vietę ſubnectere, quam non aſſumpſit in ſuo Algebrę Supplemento Herigonius, & ſit.

LEMMA TERTIVM.

Si Duæ Lineæ Rectæ à Puncto extra Circulum eductæ ipſum ſecent, quod autem fit ſub Partibus Exterioribus eductarum, Æquale ſit ei quod fit ſub Interioribus, Exteriores Partes permutatim ſumptæ ſunt Proportionales continuè inter Partes Interiores.

SVb A Centro deſcriptum Circulum ſecent duæ Lineæ Rectæ à Puncto B, vna quidem in Punctis CD, altera in EF, vnde Exteriores Partes ſecantium ſint BC, BE. Quod autem fit ſub BC, BE, Æquale ſit ei quod fit ſub DC, FE, Interioribus Partibus. Dico inter DC, & FE, Proportionales eſſe continuè BC, & BE, aſſumendo eas permutatim, vt videlicet Interiorem Partem primæ ſecantis, Pars ſequatur Exterior ſecantis ſecundæ, vel Interiorem Partem ſecundæ Pars Exterior primæ, nempe eſſe, vt DC, ad BE: ita BE, ad BC: & ita BC, ad EF.

Quoniam enim id quod fit ſub CD, & EF, Æquale eſt, ex Hypotheſi, ei quod fit ſub BC & BE: ideò eſt vt CD, ad BE:



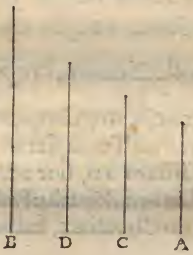
ita BC, ad EF, & per ſynæreſin, vt CD, ad BE: ita BD, ad BF. Sed ex ratione conſtructionis eſt BE, ad BC: ſicut BD, ad BF. Ergò eſt vt CD, ad BE: ita BE, ad BC: & conſequenter BC, ad EF. Quod erat Demonſtrandum.

PROPOSITIO VIGESIMA-SECVNDA.

PROBLEMA DECIMVM-OCTAVVM.

Cubum Duplicare, aut in aliâ quâvis Datâ Ratione exhibere.

DEntur Duę Extremę Lineæ A, B, in Duplâ Ratione, & ex præmiſſis Duę Mediæ in Analogiâ continuâ reperiantur C, D, & cùm ex Elementis habeatur, quæ ratio Extremarum Quatuor Proportionalium in Geometricâ Analogiâ: eadem eſt Solidi ſuper Primam ad Simile Solidum ſuper Secundam. Si igitur A, & B, Extremæ ſint in Duplâ, aut aliâ quâcunque ratione, etiam Cubus ſuper Primam, ad Cubum ſuper Secundam ſit in eâdem ratione Duplâ, vel in aliâ Datâ. Cubi namq; ſunt prorſus Similes Solidi. Igitur factum erit quod oportuit: & ſi Extremæ



in diuerſâ exponantur Ratione, pariter Solida ſuper Primam, ac Secundam in eâdemmet reſultabunt.

ADNOTATIO.

PRoblema hoc illud eſt toties à multis decantatum, vel pro Glauci Sepulchro, vel pro Arâ, Regis, aut Deliaci Oraculi iuſſu Duplicandis Propoſitum: ambo enim erant Figuræ Cubicæ, & illâ eâdem ſeruatâ neſciuerant Artifices Duplum exhibêre: A Geometriâ namque inuentio Duarum Mediarum petenda erat, & quidem Geometricè. Quod ante noſtra hæc pauca, à nemine præſtitum fuerat.

Hiſce itaque expoſitis perfecimus ea, quæ initio eramus polliciti, vt patet. Interim vnum, vel alterum ſubnectemus Problema emendatum: vt deinceps qui noſtro fruuntur otio, maiorem ad plura emendanda facilitatem conſequantur.

PROPOSITIO VIGESIMA-TERTIA.

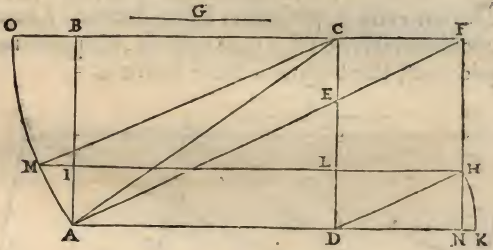
PROBLEMA DECIMVM-NONVM.

Dato Parallelogrammo Rectangulo ABCD, *& Externâ Lineâ* G; *oporteat ex Angulo* A, *Rectam ducere Lineam in oppoſitum Latus* DC, *vt producta occurrens* BC, *Externa Portio* EF, *fiat æqualis* G *Datæ.*

Eſt Pappi Libro IV. Collectionum, Propoſitione xxxj.

DVcatur Diameter AC, & Angulus ACB, ſecetur Trifariàm Lineâ MC, vt Pars Tertia fiat ACM, & à Puncto M, ducatur MH, Æquidiſtans AD, ſiue BC, & in productâ AD, ſumatur DK, Datę Lineę G Æqualis: Facto deinde Centro D, interuallo G, Portio Circuli HK, ſcribatur occurrens

Lineæ MH, in Puncto H, & ab eodem ducatur FHN Parallela Lateribus AB, DC, quam cum BC productâ, conuenire manifeſtum eſt: concurſus ſit in F Puncto, & iuncta AF, ſecans DC in E. Dico quòd EF, Æqualis eſt G, & efficit Problema. Compleatur Figura ABFN, cuius Diameter AF, & Æqualis illi altera BN, Triangula CEF, DLH, ſunt Æquiangula: quod quidem ratione Parallelarum facilè probabitur. At in Quadrilatero DEFH, Duo Latera DE, HF, Æqualia ſunt: ſicut & in altero CFHL, Duo FH, CL. Igitur & DE, & CL, Æqualia erunt. Ideóque in ijſdemmet Triangulis CEF, LDH, Latera erunt omnia ſibi inuicem reſpondentia, æqualia: & EF, ipſi G, æqualis fiet. Quod erat Demonſtrandum.



ADNOTATIO.

PRæmiſſa Demonſtratio alijs medijs poſſet inſtitui: At nos breuitati ſtudentes omittimus. Cæterùm Pulcherrimum hoc Problema per Solida, ſcilicet Conicas Sectiones, Pappus demonſtrauit: adeò vt in D Puncto, Vertex Hyperboles deſcribendæ fieret, cuius Aſymptoti AB: BC, Et per 12^{am}. Libri Secundi Apollonij, complementorum AL, CF, probat æqualitatem. At verè in Plano

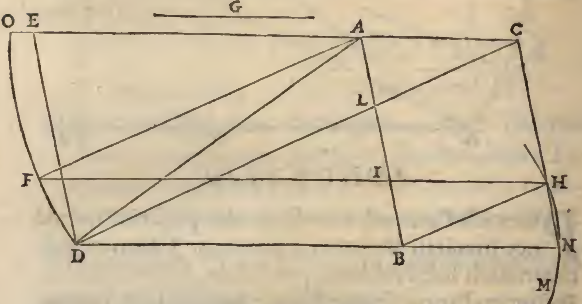
Conicæ Sectiones deſcribi Geometricè ſimpliciter non conceduntur: Noſtra autem conſtructio omnem rejicit ſcrupulum, vt patet: & ex hac Propoſitione, Vietæi Poſtulati Geometrica oſtendetur Effectio, vt ſequitur.

PROPOSITIO VIGESIMA-QVARTA.

PROBLEMA VIGESIMVM.

Datis Duabus Lineis Rectis Angulum quemcunque facientibus, & poſitione Puncto extrà, Datâ etiam Lineâ Magnitudine poßibili, hanc inter Datas Lineas à Puncto Geometricè aptare.

SInt Lineæ AB, AC, Angulum BAC efficientes, & Punctum extrà D, poſitione: à quo ducenda Linea ſit, cuius Pars inter illas ſic aptari opus ſit, vt opponens Angulo BAC, Pars Æquetur Datæ Lineæ G.



Ducantur à Puncto D, Parallelæ DB, DE, ipſis AC, AB: ducatur etiam DA. Et Angulus DAE, diuidatur Trifariàm, vt ſuprà abundè Demonſtratum eſt. Et Pars Tertia

tia fiat Angulus, Arcui DF, competens: & à Puncto F, ducatur FH, Parallela ipſis AC, ſiue DB: & Centro facto B, cum interuallo Datæ G, Portio Circuli ſcribatur MH, quam ipſa FH, in Puncto H intercipiat, à quo Puncto H, fiat CHN, Parallela ipſi AB, quæ quidem in productam EA, occurrat in C. Ducatur deinde ex D, in C Punctum, Linea DC, cuius Pars CL, quæ Angulo CAL, ſubtenditur, erit Æqualis G Datæ Lineæ: nam inter Parallelas AB, CH, ſuper eâdem Baſi Duo ſunt Parallelogrammata ACHI, LCHB, Æqualia cùm neceſſariò ſint, à quibus ſi quod illis commune eſt Trapezium CLIH, auferri intelligatur, relinquentur Triangula Duo ACL, IHB, Æqualia: quæ etiam, vt ex ipſa Conſtructione patet, Æquiangula ſunt. Latera igitur eorumdem Homologa, Æqualia erunt: hoc eſt, CL Æqualis fiet Lineæ BH, ſiue Datę G Externæ. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO VIGESIMA-QVINTA.

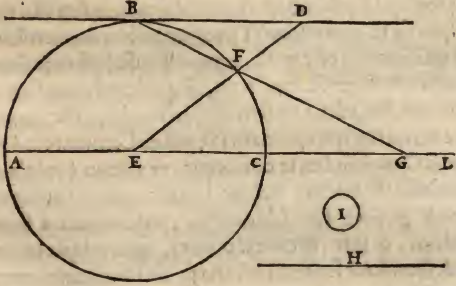
PROBLEMA VIGESIMVM-PRIMVM.

Circulo Dato, & Lineâ Rectâ Tangente Circulum: poſsibile eſt à Centro Circuli ducere Rectam ad Tangentem, ita vt quæ Recta fuerit inter Tangentem, & Circuli Circumferentiam, ad Radium Circuli, Minorem Rationem habeat, quàm Circumferentia Circuli, quæ eſt inter Contactum, & Productam ad Datam cujuſcunque Circuli Circumferentiam.

Eſt Archimedis Libro de Spiralibus, Propoſitione V.

DEtur Circulus ABC, qui tangatur Lineâ BD, in B. Detur autem, & Circellus I. Ducatur per E Centrum, Linea AEL, Æquidiſtans BD, & ſit Linea H, maior Circuli Peripheriâ I: tum à puncto B, Contactus trajiciatur BFG, occurrens Lineę AL, ita vt Pars FG, quæ cadit intra Convexum Circuli, & eductam Diametrum Æquetur ipſi H. Denique à Centro E, per F, egrediatur Linea EFD, incidens in Tangentem. Dico Lineam FD, inter Tangentem, & Circuli Circumferentiam eſſe ad Radium FE, in Minori Ratione, quàm Arcus BF, ad Circuli I, Circumferentiam. Anguli enim ad F, qui ad Vertices ſunt Æquales: Tum alterni DBF, EGF. Proinde Triangula BFD, EFG, Æquiangula ſunt, & Latera Proportionalia habent: ita vt DF, ſe habeat, ad FB: vt FE, ad FG: & viciſſim DF, ad FB: vt BF, ad FG: Habet autem BF, ad FG Minorem Rationem, quàm

Arcus F B, ad eandem F G, quia Recta Minor eſt Arcu quem ſubtendit. Ergò DF, ad FE, eſt in Minori Ratione, quàm Arcus BF, ad FG, ſeu ad Æqualem H. Atqui H, Maior eſt Peripheriâ Circuli I.



Et ex conſequenti Arcus B F, adhùc Maiorem habet Rationem ad Dati Circuli I, Circumferentiam, quàm DF, ad FE. Et hoc erat demonſtrandum.

ADNOTATIO.

INter limites conſiſteret Geometriæ, Problema hoc, ſi à Puncto B, in eductam Diametrum ita collocaretur F G, vt Æqualis fieret Datę H. At in eiuſmodi Effectione diminutus Author nobis eſt, ibi tamen aliquid ampliùs extare debuerat, quod nos latet. Eutocij Scholia non habentur: Et Erudítiſſimus Fridericus Commandinus, qui Commentatoris partes ſuſceperat, hæc, vel tantâ diſſimulatione pertranſijt; quod quidem mirum videtur, ex eo quòd ingenuus, & accuratus vbique viſus fuerit. Succeſſit Elegantiſſimus

David Rivaltus à Flurantiâ qui eadem recognouit, & in Scholio huius Propoſitionis, hæc adnotauit;

Lineare eſt hoc Problema, nec verè Geometricè ſoluitur, ſed quidem Mechanicè: verùm hoc viſum eſt eſſe ſatis Archimedi: cùm non in ſequentibus, hoc Problemate aliud Problema habeat ſoluendum, ſed ſibi tantùm opus ſit in quibuſdam Theorematibus demonſtrandis, in quibus rem eſſe poſſe, demonſtraſſe ſufficit: eſſe autem poſſibile facere Lineam FG, Æqualem Propoſitæ H, liquidò conſtat, cùm tandem aliquo modo perficiatur.

Hæc Rivaltus, qui quodam Prępoſito Lemmate, ad Nicomedis Conchoïden ſe conuertit, vt aliquo (vt ipſe aſſerit) modo abſoluat: Verùm in hoc, quòd Problema eiuſmodi genere ſuo Lineare ſit, admodùm à ſcopo digreditur, & ipſe, & cæteri omnes, quicunque in eandem deſcendunt ſententiam: nam de Planorum omninò familiâ illud eſt, vt planiſſimè oſtendimus. Quòd autem hactenus ab alijs non ſit Geometricè ſolutum in integrum, veriſſimum quidem eſt: At per partes, iam effecerat Vitellio, in ſuo Optices Theſauro ad Propoſitionem 128. Primi Libri, & in caſu eodem quo vtitur Archimedes, ſcilicet Puncto Dato in Vertice Quadrantis. Quod & adnotauerat etiam Commandinus ad Propoſitionem 30. Libri Quarti Collectionum Doctiſſimi Pappi. Defecerat deinde Vitellio ad eiuſdem Libri Propoſitionem 130. dum generaliter illud idem tentaſſet tradere. At nulla interim, inquam, videbatur ad ſoluendum Geometricè repugnantia, & apud Archimedem extitiſſe Methodum fas eſt cenſeri, & modò ex noſtris abundè habebunt harum ſtudioſi ſuperiùs.

Cæterùm cùm Vieta ſuum Geometriæ Supplementum claudat, & nos verbis ijſdem conceptis claudere conuenit.

CONSECTARIVM GENERALE.

Generaliter id verum eſt, opere ſaltem alterutro, vel conſtructionis Duarum Mediarum continuè Proportionalium inter Datas, vel Sectionis Anguli in Tres Partes Æquales, omnia Problemata, alioqui non ſolubilia, explicari, in quibus Cubi Solidis, vel Quadrato-quadrata Plano-planis ſine adfectione, vel cum adfectione adæquantur.

ENimverò oſtenſum eſt in Tractatu de Æquationum Recognitione, Æquationes Quadrato-quadratorum ad Æquationes Cuborum reduci.

Cubos verò adfectos ſub Quadrato, ad Cubos adfectos ſub Latere.

Rurſus, adfectos Cubos, ſub Latere reduci ad Cubos Puros.

Adfectos verò Cubos, ſub Latere negatè, ita demùm reduci ad Puros, cùm Solidum, à quo adficitur Cubus, negatur de Cubo, & prętereà Triens Plani coëfficientis, cum Latere adficiens Solidum cedit Quadrato Semiſſis Latitudinis oriundæ ex adplicatione adfecti Cubi, ad prædictum Trientem.

In Cubis igitur Puris, vtpotè cùm A, de quâ quęritur, Cubus proponitur Æquari B Quadrato in D, intelligentur B, & D, Extremæ in ſerie Quatuor continuè Proportionalium, & harum A, de quâ quæritur eſſe Secunda.

In Cubis autem ita adfectis, ſub Latere negatè, vt Triens Plani coëfficientis, cum Latere adficiens Solidum præſtet Quadrato Latitudinis Semiſſis oriundæ ex

adplicatione adfecti Cubi ad prædictum Trientem, vtpotè, cùm A Cubus, Minùs B Quadrato, Ter in A, proponitur Æquari B Quadrato, in D Bis, & B præſtat ipſi D. Duo intelligentur proponi Triangula Æquicrura, & ipſa Cruribus Æqualia alterum alteri, quorum Secundi Angulus, qui eſt ad Baſim, intelligitur Triplus ad Angulum, qui eſt ad Baſim Primi, & Baſis Secundi eſſe D: Crus verò B. A autem de quâ quæritur, eſſe Baſis Primi.

In Cubis denique ita adfectis, vt ipſi de adficiente Solido negantur, vtpotè, cùm B Quadratum Ter in E, Minùs E Cubo Æquabitur B Quadrato in D Bis, Eâdem ſtante conſtructione, quæ in ancedente Formulâ expoſita eſt, E, de quâ quęritur, fiet Baſis Dimidia Primi, multatâ, continuatáve Longitudine eius, cuius Quadratum Æquale eſt Triplo Quadrato Altitudinis Primi.

Quòd enim in Triangulo Æquicruro Crus ſemper Maius ſit Baſe Dimidiâ, vel ex eo euidens fit, quòd Altitudo ſecet Baſim Bifariàm. Itaque Cruris Quadratum præſtat Quadrato Dimidiæ per ipſius Altitudinis Quadratum.

Atque adeò Duobus Problematis Æquationes Cuborum omnes, & Quadrato-quadratorum cuiuſcunque adfectionis alioqui non ſolubiles explicabuntur, vnâ inuentione Duarum Mediarum inter Datas, alterâ Anguli Dati in Tres Æquales Partes Sectione. Quod animaduertiſſe fuit operæ-pretium.